Studio generale di una quadrica

Manlio De Domenico

19 Giugno 2003

Definizione 1 *Si definisce* quadrica Q *un'equazione algebrica* $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ *del secondo ordine omogenea.*

Detta A *la* matrice simmetrica dei coefficienti 4x4*, e* $\underline{x}$ *il vettore delle coordinate omogenee,* Q *ha equazione* $\underline{x}^t A \underline{x} = 0$.

Una quadrica può essere **riducibile** o **non riducibile**, tuttavia la situazione è diversa rispetto alle coniche.

La quadrica non è **specializzata** (cioè non ha almeno un punto doppio) se $rg(A) = 4$; è specializzata ma irriducibile se $rg(A) = 3$; è specializzata e riducibile in due piani distinti se $rg(A) = 2$; è specializzata e riducibile in due piani coincidenti se $rg(A) = 1$.

Dalla definizione data adesso di quadrica ne scaturisce subito che assegnato un piano qualunque dello spazio (dunque, algebricamente, una relazione lineare tra le 4 variabili omogenee della quadrica), si ottiene dalla sua intersezione algebrica con essa, un'equazione di 2° grado in 3 variabili omogenee, che caratterizzano proprio una conica.

1 Classificazione

Una quadrica è classificabile a partire dalle sue intersezioni con il piano improprio.

$$\begin{cases} \underline{x}^t A \underline{x} = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Tale intersezione dà luogo ad una conica C_∞, detta ovviamente *all'infinito.* Si presentano 3 casi:

- La C_∞ è irriducibile a punti reali, dunque la quadrica si dirà **iperboloide**;
- La C_∞ è irriducibile a punti tutti complessi, dunque la quadrica si dirà **ellissoide**;
- La C_∞ è riducibile, dunque la quadrica si dirà **parboloide**.

2 Tangenti a una quadrica

2.1 Rette tangenti

La retta generica passante per due punti $P(x_1, x_2, x_3)$ e $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ è r : $\lambda \underline{x} + \mu \underline{x}$, con $\lambda, \mu \in R$.

I punti di r che appartengono a Q sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \underline{x}^t A \underline{x} = 0 \\ \lambda \underline{x} + \mu \underline{x'} \end{cases}$$

che conduce all'equazione di 2° grado

$$\lambda^2 \underline{x}^t A \underline{x} + 2\lambda\mu \underline{x}^t A \underline{x'} + \mu^2 \underline{x'}^t A \underline{x'} = 0$$

il cui discriminante è

$$\frac{\Delta}{4} = (\underline{x}^t A \underline{x'})^2 - (\underline{x}^t A \underline{x})(\underline{x'}^t A \underline{x'})$$

Si presentano i 3 casi:

- $\frac{\Delta}{4} > 0$: r è secante a Q;
- $\frac{\Delta}{4} = 0$: r è tangente a Q;
- $\frac{\Delta}{4} < 0$: r è esterna a Q.

Una retta che abbia in comune con una quadrica tre punti, appartiene ad essa. Tuttavia una quadrica contenente una retta non è necessariamente spezzata (si pensi ad un cono).

2.2 Piani tangenti

Oltre ad una retta, una quadrica può avere un intero piano tangente. Da quanto detto in precedenza, se il piano è tangente, il punto di tangenza sarà una conica ovviamente degenere.

Il generico piano è $P : a^t \underline{x} = 0$, con a vettore riga dei coefficienti.

I punti di P che appartengono a Q sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \underline{x}^t A \underline{x} = 0 \\ a^t \underline{x} = 0 \end{cases}$$

che conduce ad un'equazione di 2° grado il cui discriminante è

$$\frac{\Delta}{4} = (\underline{x'}^t A \underline{x})^2 - (\underline{x}^t A \underline{x})(\underline{x'}^t A \underline{x'})$$

Il piano tangente si ha per $\frac{\Delta}{4} = 0$, dunque:

- Se il punto appartiene alla quadrica, il **piano tangente** ha equazione $\underline{x}'^t A\underline{x} = 0$, ed esso può anche considerarsi come luogo geometrico delle rette tangenti a Q in quel punto;

- Se il punto non appartiene alla quadrica (dunque il piano tangente è condotto da esso, e non per esso), avremo un fascio di rette proprio nello spazio con centro nel punto, che vanno a costruire un **cono circoscritto** (a breve vedremo cosa è un cono...) di equazione $(\underline{x}'^t A\underline{x})^2 - (\underline{x}^t A\underline{x})(\underline{x}'^t A\underline{x}') = 0$.

Una quadrica ha piano tangente ben determinato in ogni suo punto semplice, una quadrica non specializzata in ogni suo punto.

In forma esplicita, ecco rispettivamente le equazioni di un piano tangente e di un cono circoscritto:

$$\begin{gathered}(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4')x_1 + \\ (a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4')x_2 + \\ (a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4')x_3 + \\ (a_{14}x_1' + a_{24}x_2' + a_{34}x_3' + a_{44}x_4')x_4 = 0\end{gathered} \tag{1}$$

Detti A_{11}, A_{22}, A_{33} e A_{44} i coefficienti del piano tangente, e $p = \underline{x}'^t A\underline{x}'$ (il valore del punto come se appartenesse alla quadrica), avremo per il cono circoscritto:

$$\begin{gathered}(A_{11}^2 - pa_{11})x_1^2 + (A_{22}^2 - pa_{22})x_2^2 + (A_{33}^2 - pa_{33})x_3^2 + (A_{44}^2 - pa_{44})x_4^2 + \\ +2(A_{11}A_{22} - pa_{12})x_1x_2 + 2(A_{11}A_{33} - pa_{13})x_1x_3 + 2(A_{11}A_{44} - pa_{14})x_1x_4 + \\ +2(A_{22}A_{33} - pa_{23})x_2x_3 + 2(A_{22}A_{44} - pa_{24})x_2x_4 + 2(A_{33}A_{44} - pa_{34})x_3x_4 = 0\end{gathered} \tag{2}$$

2.3 Punti di una quadrica

Definizione 2 *Un punto reale di una quadrica di cui P sia il piano tangente, si dice **iperbolico**, **parabolico**, o **ellittico**, a seconda che la conica sezione della quadrica col piano P sia riducibile in due rette reali distinte, reali e coincidenti, complesse coniugate.*

Data una quadrica Q, per conoscere di che tipo di quadrica si tratti, è necessario intersecarla con il piano improprio; per sapere di che punti è costituita basta intersecarla con un suo piano tangente, in quanto si dimostra che una quadrica ha punti soltanto dello stesso tipo.

3 Polarità

La (1) è l'equazione di un piano speciale, detto **polare**.

Definizione 3 *Dato un punto $P' \ni Q$ (Q non specializzata), si definisce* polare $\pi(P')$ *il piano $\underline{x'}^t A\underline{x} = 0$ di polo P'.*

Ad ogni punto dello spazio corrisponde uno e un solo paino polare rispetto ad una quadrica, il cui significato geometrico è quello di contenere tutti i punti di tangenza condotti da P' a Q, ovvero è il luogo dei punti di contatto del cono circoscritto di vertice P' con la quadrica Q.

Ovviamente, se $P' \in Q$, il piano polare è quello tangente in P'; possiamo dunque dire che quello di *piano polare è* una generalizzazione del concetto di piano tangente.

La polarità rispetto a Q è:

- una **relazione lineare**: cioè se un punto descrive una piano, il suo polare appartiene ad una stella di piani;
- una **corrispondenza biettiva**: in quanto ogni piano P dello spazio è polare di uno e un solo punto, detto **polo**;
- gode di **reciprocità**: cioè

Teorema 1 *Se A è un punto che descrive un piano, il suo piano polare P_A descrive una stella il cui centro è polo di quel piano.*

Con riferimento ad una quadrica:

Definizione 4 *Due punti si dicono* coniugati *quando l'uno appartiene al piano polare dell'altro e viceversa.*

Definizione 5 *Due rette si dicono* coniugate *quando tutti i piani polari dei punti dell'una passano per l'altra e viceversa.*

Definizione 6 *Due piani si dicono* coniugati *quando l'uno contiene il polo dell'altro e viceversa.*

Definizione 7 *Si definisce* centro *di una quadrica, il polo del piano improprio rispetto ad essa.*

Il centro può essere proprio o improprio, per questo si distinguono *quadriche a centro* e *quadriche non a centro.*

Definizione 8 *Si definisce* piano diametrale *di una quadrica, ogni piano polare di un punto improprio rispetto a Q.*

Dalla definizione data, discende subito che se $P_\infty(\lambda, \mu, \nu, 0)$ sono i punti i impropri, allora

$$P_d : \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) + \mu(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4) + \\ +\nu(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4) = 0 \quad (3)$$

è l'equazione della stella dei piani diametrali.

Il centro di una quadrica si può ottenere intersecando 3 piani diametrali qualunque, per esempio quelli di polo $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$.

Definizione 9 *Due piani diametrali si dicono* coniugati *se l'uno contiene il polo dell'altro e viceversa.*

Questa definizione implica la condizione

$$a_{11}\lambda\lambda' + a_{12}(\lambda\mu' + \mu\lambda') + a_{13}(\lambda\nu' + \nu\lambda') + a_{22}\mu\mu' + a_{23}(\mu\nu' + \nu\mu') + a_{33}\nu\nu' = 0 \quad (4)$$

Definizione 10 *Si definisce* diametro *di una quadrica, ogni retta coniugata di una retta impropria rispetto alla quadrica.*

Analogamente:

Definizione 11 *Si definisce* diametro *di una quadrica, l'intersezione di due piani diametrali o ogni retta passante per il centro della quadrica.*

Con riferimento ad una quadrica a centro, 3 piani diametrali a due a due ortogonali, costituiscono una **terna di piani diametrali coniugati** (un **triedro autoconiugato**) rispetto alla quadrica.

Definizione 12 *Si definisce* piano principale *di una quadrica, un piano diametrale ortogonale alla direzione di cui è coniugato.*

Un piano principale per una quadrica è dunque l'equivalente spaziale di un asse per una conica.

La definizione data implica la condizione algebrica sulle coordinate dei punti impropri (4):

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0$$

le cui soluzioni sostituite nella (4), favoriscono la conidizione necessaria affinche un piano sia principale.

Definizione 13 *Si definisce* asse *di una quadrica, un diametro coniugato ad una retta impropria, che sia ortogonale alla direzione di cui è coniugato.*

L'intersezione di 2 piani principali è ovviamente un asse e il punto improprio di un asse ha come piano polare un piano principale.

Definizione 14 *Si definiscono* vertici *(propri) di una quadrica, le intersezioni di Q con i suoi assi.*

Da ciò se ne deduce subito che un piano tangente in un vertice è ortogonale all'asse passante per qul vertice.

Data la quadrica di equazione non omogenea, un punto improprio $P_\infty(\lambda, \mu, \nu, 0)$ ha piano polare di equazione (1) ma in coordinate non omogenee. Esso è ortogonale a P_∞ se

$$\frac{a_{11}\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu}{\lambda} = \frac{a_{12}\lambda + a_{22}\mu + a_{23}\nu}{\mu} = \frac{a_{13}\lambda + a_{23}\mu + a_{33}\nu}{\nu}$$

ovvero se, detto k il valore comune ai 3 membri, è soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\lambda + a_{12}\mu + a_{13}\nu = 0 \\ a_{12}\lambda + (a_{22} - k)\mu + a_{23}\nu = 0 \\ a_{13}\lambda + a_{23}\mu + (a_{33} - k)\nu = 0 \end{cases}$$

Il sistema è soddisfatto se la matrice associata ha determinante nullo: ma si ha così un'equazione di 3° grado nell'incognita k, che risolta, con le sue soluzioni reali inserite nel sistema, fornisce i 3 piani diametrali della quadrica a centro (un paraboloide, l'unica quadrica non a centro, ammette soltanto due piani principali).

Se l'equazione di 3° grado precedente ammette 3 radici reali distinte, la quadrica ammette 3 piani principali; se una radice è doppia il sistema ha rango 1 ed allora esistono ∞^1 piani principali e la quadrica si dice di **rotazione**; se le 3 radici coincidono, allora esiste una stella di piani diametrali e ciò caratterizza una **sfera** (la quadrica più simmetrica esistente), in cui ogni piano diametrale è principale.

4 Equazioni ridotte

Con riferimento a quadriche non specializzate, distinguiamo tra quadriche a centro e non per arrivare a delle forme ridotte in particolari sistemi di riferimento.

4.1 Quadriche a centro

Scegliamo come riferimento un sistema di piani coordinati coincidenti con un triedro autoconiugato e come origine il centro della quadrica: con tale scelta tali piani risultano essere i polari dei punti impropri dei 3 assi di coordinate omogenee $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ e $(0,0,1,0)$.

Un sistema di riferimento così scelto prende il nome di **tetraedro autopolare** rispetto alla quadrica.

Imponendo le condizioni date, l'equazione della quadrica generica si riduce a:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0 \tag{5}$$

da cui sono evidenti numerose proprietà di simmetria. Notiamo che $det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, dunque se anche un solo coefficiente tra questi è nullo la quadrica è specializzata.

4.2 Quadriche non a centro

Il sistema di riferimento precedente non è possibile per le quadriche a centro improprio, dunque scegliamo i piani $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ in due piani diametrali coniugati, la loro intersezioneè un diametro della quadrica e quindi la incontra nel centro improprio e in un punto proprio che assumiamo come origine. Il piano $x_3 = 0$ sia quello tangente alla quadrica nell'origine.

Imponendo le condizioni date, l'equazione della quadrica generica si riduce a:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{34}x_3 = 0 \tag{6}$$

5 Tipi di quadriche

5.1 Quadriche specializzate

5.1.1 Cono

Come già detto, una quadrica è specializzata se possiede almeno un punto doppio. Sia $V(0,0,0,0)$ tale punto doppio che diremo **vertice** e sia C_∞ la conica all'infinito che diremo **direttrice**.

Il fascio di rette descritto al variare di un generico punto P sulla conica, descrive allora un **cono quadrico** con vertice in V.

L'equazione è presto ottenuta scrivendo la generica retta che unisce il vertice al punto P e utilizzando questa e l'equazione della conica per eliminare i parametri di P e ottenere l'equazione in coordinate omogenee. Un cono di vertice generico $V(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0})$ si ha per una traslazione d'assi, ed avrà equazione generale

$$\begin{aligned}a_{11}(x_1 - x_{1,0})^2 + a_{22}(x_2 - x_{2,0})^2 + a_{33}(x_3 - x_{3,0})^2 + \\ +2a_{12}(x_1 - x_{1,0})(x_2 - x_{2,0}) + 2a_{13}(x_1 - x_{1,0})(x_3 - x_{3,0}) + \\ +2a_{23}(x_2 - x_{2,0})(x_3 - x_{3,0}) = 0\end{aligned} \tag{7}$$

5.1.2 Cilindro

Il **cilindro** è un cono di vertice improprio per cui si costruisce analogamente al cono, con equazione strettamente dipendente dall'equazione della conica.

5.2 Quadriche non specializzate

Faremo riferimento alle forme ridotte per le quadriche non specializzate a centro e non a centro definite nel paragrafo precedente.

5.2.1 Ellissoide a punti reali

Una quadrica del tipo (5) con tutti i coefficienti non nulli e positivi si definisce **ellissoide a punti reali** ed ha forma

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \tag{8}$$

a meno di permutazioni tra le coordinate omogenee.

5.2.2 Iperboloide a una falda

Una quadrica del tipo (5) con 3 coefficienti non nulli, due positivi e uno negativo, si definisce **iperboloide a una falda** o **iperboloide a punti iperbolici** ed ha forma

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \tag{9}$$

a meno di permutazioni tra le coordinate omogenee.

5.2.3 Iperboloide a due falde

Una quadrica del tipo (5) con 3 coefficienti non nulli, uno positivo e due negativi, si definisce **iperboloide a due falde** o **iperboloide a punti ellittici** ed ha forma

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \tag{10}$$

a meno di permutazioni tra le coordinate omogenee.

5.2.4 Ellissoide a punti complessi

Una quadrica del tipo (5) con tutti i coefficienti non nulli e negativi si definisce **ellissoide a punti complessi** ed ha forma

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = -1 \tag{11}$$

a meno di permutazioni tra le coordinate omogenee.

5.2.5 Paraboloide ellittico

Una quadrica del tipo (6) con tutti i coefficienti non nulli e negativi si definisce **paraboloide a punti ellittici** o **paraboloide ellittico** ed ha forma

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3 \tag{12}$$

a meno di permutazioni tra le coordinate omogenee.

5.2.6 Paraboloide a sella

Una quadrica del tipo (6) con i coefficienti non nulli e di segni opposti si definisce **paraboloide a punti iperbolici** o **paraboloide a sella** ed ha forma

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3 \tag{13}$$

a meno di permutazioni tra le coordinate omogenee.

6 Fasci di quadriche

Per individuare una quadrica a meno di un fattore non nullo di proporzionalità sono necessari 9 punti linearmente indipendenti o in generale 9 condizioni linearmente indipendenti.

Un numero inferiore di condizioni permette di costruire, come nel caso delle coniche, un **fascio di quadriche**, ottenibile come combinazione lineare di due generiche quadriche che soddisfano alle condizioni richieste.