

Relatività Ristretta

Manlio De Domenico

Univeristà degli studi di Catania

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Indice

1	Relatività ristretta	7
1.1	Introduzione	7
1.2	Le trasformazioni di Galileo	7
1.3	L'esperimento di Michelson-Morley	10
1.3.1	La fisica dell'esperimento	12
1.4	Incongruenze della meccanica newtoniana	14
1.5	I due principi di relatività ristretta	15
1.6	Linee e superfici universo	16
1.6.1	Spazio-Tempo e linee universo	16
1.6.2	Spazio-Tempo e superfici universo	20
1.7	Deduzione classica delle trasformazioni di Lorentz	25
1.7.1	Trasformazioni $(\vec{x}, t) \longrightarrow (x', t')$	26
1.7.2	Trasformazioni delle velocità	29
1.8	Deduzione di Einstein delle trasformazioni di Lorentz	29
1.8.1	Simultaneità di eventi	30
1.8.2	La fisica dei regoli e degli orologi	31
1.9	Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz	36
1.9.1	Il fattore di Lorentz: trasformazioni a confronto	36
1.9.2	Dilatazioni e contrazioni spazio-temporali	36
1.9.3	Trasformazioni generali	39
1.10	Lo spazio di Minkowsky	40
1.10.1	L'intervallo quadro	40
1.10.2	Coni di luce e iperboli degli eventi	42
2	Dinamica relativistica	45
2.1	Il quadrivettore	45
2.1.1	Componenti covarianti e controvarianti	45
2.2	La matrice di Lorentz	46
2.3	Algebra dei 4-vettori: il tensore metrico	47
2.4	Invarianti	47
2.4.1	L'intervallo ds	47

2.4.2	Prodotto scalare e vettoriale	48
2.4.3	L'operatore \square di D'Alembert	48
2.5	Cinematica relativistica	49
2.5.1	Quadrivelocità	49
2.5.2	Quadriaccelerazione	49
2.6	Dinamica relativistica	50
2.6.1	Richiami di meccanica lagrangiana e hamiltoniana . . .	50
2.6.2	Lagrangiana relativistica	51
2.6.3	Il quadrimpulso	52
2.6.4	Equazioni del moto	53
2.6.5	Conclusioni	54
2.7	Applicazioni	54
2.7.1	Energia di quiete	54
2.7.2	Mare di Dirac	54
2.7.3	Decadimento	55
2.7.4	Urti di particelle	56
2.8	Equivalenza massa-energia	57
3	Relatività generale	59
3.1	Il paradosso dei gemelli	59
3.2	I principi della relatività generale	63
3.2.1	Il principio di equivalenza	63
3.3	Tensore metrico e gravità	64
3.3.1	Determinazione della metrica	65
3.4	Prove sperimentali	67
3.4.1	Amplificazione dell'effetto Doppler	67
3.4.2	Deflessione della luce	68
3.4.3	Perielio di Mercurio	68
4	Cenni di elettrodinamica relativistica	69
4.1	Campo elettrico e campo magnetico	69
4.2	Invarianza di gauge	71
4.3	Equazioni del moto	71
4.4	Il tensore del campo e.m.	73
4.5	Invarianti	74
4.6	Equazioni di Maxwell	75
4.6.1	Conclusioni	78
4.7	Onde	78
4.8	Effetto Doppler	81
4.8.1	Conseguenze	81
4.9	Integrazione di Wiechert dei potenziali	82

Simbologia

In quanto segue, verranno utilizzati i seguenti simboli:

- \wedge : *prodotto vettoriale*;
- \cdot : *prodotto scalare*;
- \vec{x} : *vettore x* ;
- x_i : *componente i -esima del vettore x* ;
- \underline{x} : *vettore a n componenti*;
- $\vec{\nabla}\Psi$: *operatore $\text{grad}(\Psi)$, ossia gradiente di Ψ* ;
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}$: *operatore $\text{div}(\vec{\Psi})$, ossia divergenza di Ψ* ;
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{\Psi}$: *operatore $\text{rot}(\vec{\Psi})$, ossia rotore di Ψ* ;
- $\nabla^2\Psi$: *operatore $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\Psi$, ossia laplaciano di Ψ* ;
- $\square\vec{\Psi}$: *operatore, ossia d'alembertiano di Ψ* ;
- $\dot{\Psi}$: *derivata prima di Ψ* ;
- $\ddot{\Psi}$: *derivata seconda di Ψ* ;
- $\dot{\vec{x}}$: *derivata prima del vettore \vec{x}* ;
- $\ddot{\vec{x}}$: *derivata seconda del vettore \vec{x}* ;

Capitolo 1

Relatività ristretta

1.1 Introduzione

Le leggi della meccanica stabilite da Newton nel XVIII secolo hanno trovato largo riscontro nei lavori sperimentali dei fisici per oltre 2 secoli.

La teoria della gravitazione newtoniana, insieme alla meccanica classica, rappresentano in maniera soddisfacente i principi che governano la natura.

Tuttavia, come avremo modo di vedere, tali teorie rappresentano solo una *buona approssimazione* della realtà, che dunque va studiata sotto nuovi punti di vista.

Fu questo il grande lavoro del fisico tedesco A. Einstein agli inizi del secolo scorso, che costruì una nuova teoria, innovativa e rivoluzionaria, che non rimase ancorata ai significati che il senso comune attribuisce ancora oggi ai concetti particolari di *spazio* e *tempo*.

A partire da considerazioni quasi banali, ma dal profondo significato fisico, e con il supporto della matematica del periodo, di Riemann e Poincaré, Einstein cambiò per sempre il nostro modo di pensare.

1.2 Le trasformazioni di Galileo

Immaginiamo per un istante un punto O e un punto O' dello spazio euclideo tridimensionale, dove si trovano due osservatori.

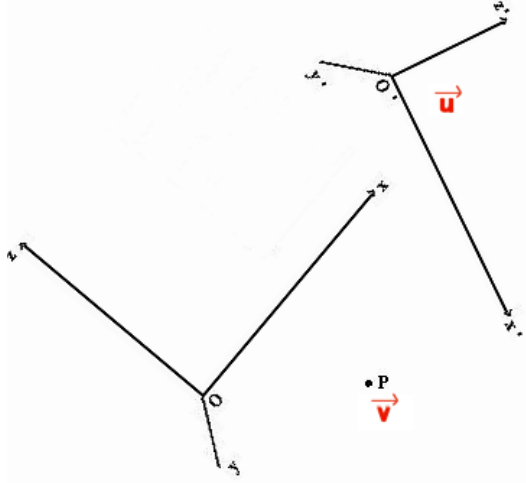
Per semplicità, e senza nulla togliere alla generalità, consideriamo il punto O coincidente con l'origine degli assi di un sistema cartesiano ortogonale S e analogamente il punto O' coincidente con l'origine degli assi di un sistema cartesiano ortogonale S' , ovviamente non coincidente con S .

Supponiamo adesso che S' si muova con velocità uniforme u rispetto a S e sia P un punto di coordinate (\vec{x}, t) dello spazio rispetto a S , indicando con

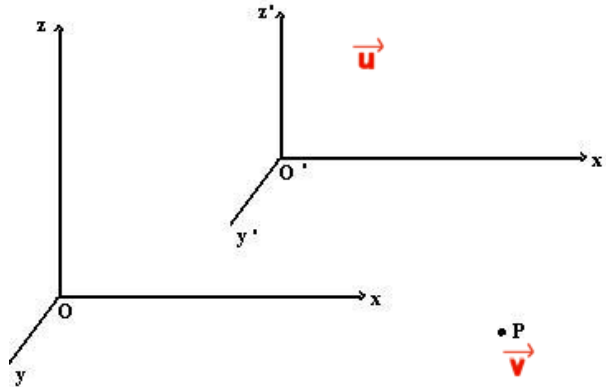
tale notazione le 4 coordinate spazio-temporali (x, y, z, t) che identificano univocamente ogni punto in tale spazio, e supponiamo inoltre che esso si muova con velocità v uniforme anch'essa.

L'osservatore O descriverà il moto del punto P in coordinate (\vec{x}, t) , mentre l'osservatore O' lo descriverà in coordinate (\vec{x}', t') .

La domanda è: *come sono legate le coordinate (\vec{x}, t) e (\vec{x}', t')* ? La situazione proposta può essere schematizzata come in figura:



Tuttavia, senza ledere la generalità, sappiamo che possiamo assumere che i due sistemi di riferimento siano con gli assi corrispondenti paralleli, ovvero che sia valida la figura:



In questo modo, all'istante $t_0 = 0$ si ha:

$$\begin{cases} d_0(O, P) = \vec{r}_{OP} \\ d_0(O, O') = \vec{r}_{OO'} \\ d_0(O', P) = \vec{r}_{O'P} \end{cases} \quad (1.1)$$

Dopo un intervallo di tempo t , le nuove distanze sono definite dalle somme vettoriali

$$\begin{cases} d(O, P) = \vec{r}_{OP} + \vec{v}t \\ d(O, O') = \vec{r}_{OO'} + \vec{u}t \\ d(O', P) = d(O, P) - d(O, O') = (\vec{r}_{OP} - \vec{r}_{OO'}) + (\vec{v} - \vec{u})t \end{cases} \quad (1.2)$$

Queste ultime equazioni prendono il nome di **trasformazioni di Galileo per le distanze**. Se si considerano i due sistemi con gli assi coincidenti e il moto soltanto lungo l'asse x , con l'ulteriore condizione che il punto O' e il punto P siano coincidenti all'istante $t_0 = 0$, tali equazioni si riducono alle

$$\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (1.3)$$

dove l'equazione $t = t'$ è *postulata* vera, a partire dal *principio di tempo assoluto* e immutabile in ogni sistema di riferimento idealizzato da Newton.

Differenziando le trasformazioni trovate rispetto al tempo (o meglio, rispetto a t e t' , che tuttavia sono stati postulati coincidenti) si ottengono le **trasformazioni di Galileo per le velocità**:

$$\begin{cases} v_x = v'_x + -u_x \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \\ t = t' \end{cases} \quad (1.4)$$

che possono essere riassunte nell'equazione vettoriale

$$\vec{v} = \vec{v}' - \vec{u} \iff t = t'$$

nel caso generale da cui siamo partiti e ricordando l'isotropia spazio-temporale.

Fino agli inizi del secolo scorso la vera natura della luce era restata un mistero. Da un lato c'era chi sosteneva la *teoria particellare* di Newton, dall'altro chi sosteneva la *teoria ondulatoria* dell'olandese Huygens.

Tuttavia, pur ammettendo la natura ondulatoria della luce, e nonostante le equazioni di Maxwell per l'elettromagnetismo dimostrassero il contrario, non era concepita l'idea di un'onda che non si propagasse in un mezzo materiale.

Lo stesso Maxwell elaborò le sue 4 equazioni con questa convinzione, che diede luogo al concetto di *etere*, un'entità invisibile e intangibile che si trova nell'universo e nel quale la materia è *immersa*.

I fisici del periodo sostenevano che sia la velocità della luce che l'etere dovevano essere soggetti alle trasformazioni di Galileo, e questo sarà il tema del prossimo paragrafo.

1.3 L'esperimento di Michelson-Morley

Molti furono gli esperimenti rivolti a dimostrare l'esistenza dell'etere e che c (la velocità della luce) fosse soggetta alle trasformazioni di Galileo, agli inizi del '900. Tuttavia quello più significativo fu condotto dai fisici Michelson e Morley con l'aiuto di un interferometro.

Tale esperimento fu la prova sperimentale delle argomentazioni di Einstein.

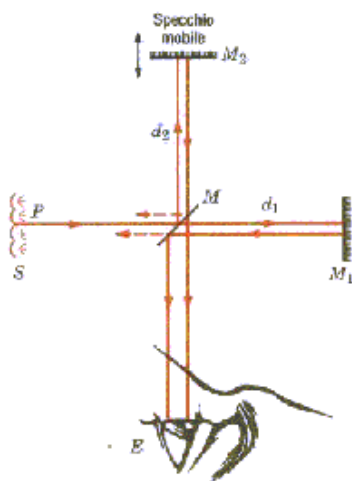
Infatti le equazioni di Maxwell, costituivano la teoria fisica più precisa e mai confutata di allora e ci si accorse che queste non risultavano invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo. Questo portava semplicemente a due conseguenze: o tali trasformazioni erano errate, perchè le leggi della fisica devono essere invarianti rispetto al sistema di riferimento inerziale nel quale vengono applicate, o tutta la teoria costruita da Maxwell sui lavori pionieristici di Coulomb, Faraday, Thomson, era da sostituire.

Il giovane Einstein rifiutò la seconda ipotesi, e si concentrò nel dimostrare che le trasformazioni di Galileo sono in realtà errate in generale.

La sua teoria relativistica oltre tutto, fu l'unica in grado di dare una spiegazione plausibile dei risultati ottenuti da Michelson e Morley.

Come detto in precedenza lo scopo dei due fisici americani era quello di dimostrare l'esistenza dell'etere, in quanto il moto della Terra in esso è equivalente al moto dell'etere rispetto alla Terra, sistema obbligatoriamente scelto per svolgere l'esperimento.

Lo strumento utilizzato fu un interferometro, di grande precisione per la misura di lunghezze o differenze di lunghezze per mezzo di frange di interferenza dovute alle note leggi dell'ottica. Lo strumento è schematizzato in figura.



Si consideri la luce proveniente dal punto p della sorgente estesa S e incidente sullo specchio semiriflettente M . Sullo specchio è depositato uno strato d'argento sottile al punto giusto da trasmettere metà della luce incidente e di rifletterne l'altra metà; nella figura, per convenienza, si è supposto trascurabile lo spessore di questo specchio.

In corrispondenza ad M la luce si divide in due onde. Quella trasmessa si propaga verso lo specchio M_1 e quella riflessa verso M_2 . Le onde vengono riflesse su ciascuno di questi specchi e si propagano nel verso opposto della loro direzione di incidenza, finché ciascuna onda giunge all'occhio.

Le onde interferiscono poiché sono coerenti, in quanto provenienti dallo stesso punto della sorgente.

Se gli specchi M_1 e M_2 sono esattamente perpendicolari tra di loro, l'effetto è lo stesso che si osserverebbe con luce proveniente da una sorgente estesa S , che giunge su una lamina d'aria di spessore uniforme $d_2 - d_1$, compresa tra due superfici di vetro.

Quando la luce giunge sulla lamina d'aria equivalente, compaiono delle frange d'interferenza, dovute alle piccole differenze degli angoli di incidenza della luce proveniente da punti diversi della sorgente estesa.

In una lamina spessa, una differenza di cammino ottico di una lunghezza d'onda si può verificare per piccolissime differenze d'angoli d'incidenza. Se lo specchio M_2 viene spostato avanti o indietro, l'effetto è quello di cambiare lo spessore della lamina d'aria equivalente.

Ammettiamo che il centro della distribuzione (circolare) delle frange di interferenza appaia oscuro e che M_2 venga spostato esattamente di tanto per cui la prima frangia luminosa d'interferenza si sposta nel centro della distribuzione (delle frange).

La lunghezza della traiettoria del fascio di luce incidente su M_2 ha subito una variazione eguale a una lunghezza d'onda. Vale a dire che lo specchio è stato spostato di mezza lunghezza d'onda (poichè la luce attraversa due volte la lamina d'aria equivalente). Con questa tecnica si possono misurare lunghezze di oggetti in funzione della lunghezza d'onda della luce.

Risalendo alla frequenza della luce, è possibile calcolare la sua velocità, che tuttavia non risulta essere nè inferiore nè superiore a quella della luce, contro le aspettative.

I due fisici diedero per fallito l'esperimento che invece fu la dimostrazione evidente della costanza della velocità della luce indipendentemente dalla sorgente che la ha emessa¹.

1.3.1 La fisica dell'esperimento

L'etere era considerato un'entità a *densità nulla e perfettamente trasparente*. Fu ideato per spiegare come la luce, un'onda, potesse propagarsi nell'universo².

In questo modo, un osservatore in moto con velocità \vec{v} (Michelson e Morley sulla Terra, appunto) avrebbe dovuto misurare, causa le trasformazioni di Galileo, una velocità $\vec{c}' = \vec{c} + \vec{v}$ per la luce. Il metodo utilizzato, come spiegato in precedenza, era interferometrico.

Trascuriamo il moto rotatorio della Terra, e alla figura del cammino ottico nell'interferometro supponiamo di sovrapporre una velocità \vec{v} (quella della Terra rispetto all'etere), che supponiamo per semplicità parallela alla distanza $d_1 = \overline{MM_1}$ e diretta da M_1 verso S .

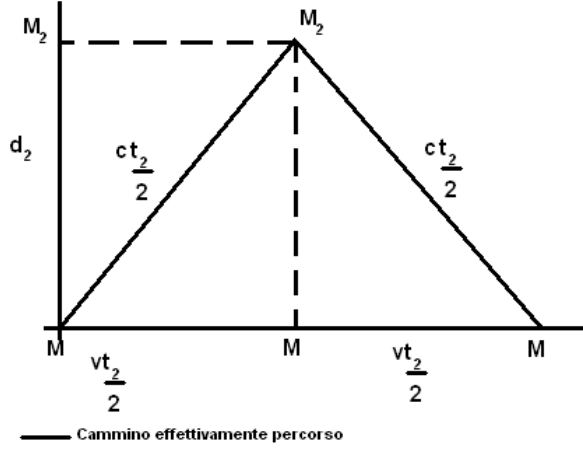
Il tempo t_1 che impiega la luce a percorrere il cammino $\overline{MM_1M}$ sarà:

$$t_1 = \frac{d_1}{c - v} + \frac{d_1}{c + v} = 2 \frac{d_1}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.5)$$

Per calcolare il tempo t_2 impiegato dalla luce a percorrere il cammino $\overline{MM_2M}$, dobbiamo considerare lo spostamento di M_2 nel sistema di riferimento dell'etere:

¹Quanto detto sull'interferometro è opera di D.Halliday e R.Resnick, in *Fondamenti di fisica*.

²Fino ad allora si pensava che per la propagazione di un'onda fosse necessario un mezzo materiale.



Il percorso complessivo è $2(c\frac{t_2}{2})$, ovvero:

$$ct_2 = 2\sqrt{d_2^2 + (v\frac{t_2}{2})^2} \implies t_2 = 2\frac{d_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.6)$$

La differenza di tempo che dà luogo allo spostamento è dunque

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left[\frac{d_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{d_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] \quad (1.7)$$

Possiamo ripetere l'esperimento ruotato di 90 gradi, ottenendo, procedendo come fatto finora, un secondo intervallo di tempo:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left[\frac{d_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{d_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \quad (1.8)$$

Si noti $\Delta t \neq \Delta t'$. Sviluppando in serie di Taylor la differenza $\Delta t' - \Delta t$, si ottiene subito $\Delta t' - \Delta t = \frac{d_1 + d_2}{c} \frac{v^2}{c^2}$, questo causerebbe uno spostamento ΔN delle frange di interferenza dovuto alla rotazione:

$$\Delta N = \frac{\Delta t' - \Delta t}{T} \simeq \frac{d_1 + d_2}{cT} \frac{v^2}{c^2} = \frac{d_1 + d_2}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad (1.9)$$

Nell'esperimento condotto dai due fisici, era $d_1 = d_2 = 11m$, $v \simeq 30\frac{Km}{s}$ (velocità orbitale della Terra) e $\lambda_{Na} = 5.5 \cdot 10^{-7}m$, per ottenere un teorico

$\Delta N = 0.4$ frange. In realtà questo non fu osservato! Il limite superiore era 0.01, sotto l'errore sperimentale.

L'esperimento fu ripetuto più volte con apparati migliori, a diverse ore del giorno e in diverse stagioni: tuttavia $\Delta N = 0$ sempre.

Mentre si credeva l'esperimento fallito, Lorentz e Fitzgerald proposero un'interpretazione alternativa: le lunghezze si contraggono di un fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ lungo la direzione del moto: $l = l^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, per cui $\Delta t = \frac{2}{c} \frac{l_2^0 - l_1^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ e $\Delta t' = \frac{2}{c} \frac{l_2^0 - l_1^0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$, di modo che $\Delta N = 0$.

Accettando l'ipotesi di Lorentz e Fitzgerald e ripetendo l'esperimento a diverse ore del giorno o diverse stagioni, ma senza ruotare l'apparato, con $l_1^0 \neq l_2^0$, si ottenevano $\Delta t = \frac{2}{c} \frac{l_2^0 - l_1^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ e $\Delta t' = \frac{2}{c} \frac{l_2^0 - l_1^0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$, per cui

$$\Delta N = \frac{|l_2^0 - l_1^0|}{\lambda} \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{v'^2}{c^2} \right) \quad (1.10)$$

Gli esperimenti di Kennerdy e Thordike per $|l_2^0 - l_1^0| = 16cm$ ottennero sempre $\Delta N = 0$. Le ipotesi di Lorentz non furono accettate dai fisici dell'epoca: tuttavia altre prove a carico della tesi che le trasformazioni di Galileo erano inadatte per certi fenomeni furono date (per esempio: aberrazione annua delle stelle circumpolari).

1.4 Incongruenze della meccanica newtoniana

A questo punto appariva chiaro come le trasformazioni di Galileo non fossero più valide. Tuttavia esse sono una diretta conseguenza della meccanica newtoniana e pertanto anch'essa doveva essere rivista.

Einstein appena a 17 anni si chiese come avrebbe visto un raggio di luce se egli lo avesse *cavalcato*: il problema in sè sembra banale, tuttavia fu quella la profonda intuizione che guidò il genio tedesco alla soluzione dei problemi che si vennero a creare agli inizi del '900.

La meccanica newtoniana presentava numerose lacune, anche di carattere concettuale.

Prima tra tutte presupponeva l'esistenza di un mezzo materiale per la propagazione di un'onda, cosa questa che si dimostrò essere errata proprio dopo l'esperimento di Michelson.

In secondo luogo Newton non poneva limiti alle velocità dei punti materiali, così per esempio era possibile accelerare arbitrariamente un oggetto fino a fargli raggiungere la velocità desiderata. Ma anche questo fu dimostrato essere non corrispondente alla realtà: infatti molti esperimenti mostrarono

come ci fosse un vero e proprio limite naturale rappresentato dalla velocità della luce.

Queste da una parte, e molte altre dall'altra, costrinsero i fisici del periodo ad indagare più a fondo le leggi che governano l'universo, fino a giungere ai due postulati fondamentali formulati da Einstein.

1.5 I due principi di relatività ristretta

Einstein era profondamente convinto, così come Galileo, che le leggi fisiche non dovessero variare al variare del sistema di riferimento inerziale in cui erano utilizzate.

Il fisico tedesco non riuscì a dare una dimostrazione matematica di questo, ma a suo favore aveva una serie interminabile di risultati sperimentali che confermavano quanto pensava.

Il risultato ottenuto è tutt'altro che banale: infatti esso ci permette di stabilire con certezza, cose che altrimenti non sarebbero stabilite altrettanto semplicemente.

Il suo lavoro fu riassunto nel **primo postulato della relatività ristretta**:

Postulato 1 *Le leggi della fisica sono invarianti rispetto al sistema di riferimento inerziale nel quale sono applicate.*

Questo rappresentava una generalizzazione del principio di relatività galileiano, che si limitava alle sole leggi della meccanica.

L'altra profonda intuizione di Einstein fu quella della costanza della velocità della luce e della sua natura di *velocità limite*, dimostrata dall'esperimento di Michelson:

Postulato 2 *La velocità della luce c nel vuoto è indipendente dalla sorgente che l'ha emessa e dallo stato di moto rettilineo uniforme di chi la osserva.*

Questo secondo postulato fu quello che distrusse definitivamente le trasformazioni di Galileo, che altrimenti avrebbero contemplato velocità superiori a c .

Per esempio basti pensare ad un uomo che corre a velocità costante v mentre accende una lampadina: in teoria chi lo osserva dovrebbe vedere arrivare il fascio luminoso con velocità $c + v$, contro ogni osservazione sperimentale!

A questo punto si rende necessaria l'estensione o la modifica completa delle equazioni di Galileo, opera questa compiuta dal fisico Lorentz.

Le trasformazioni di Galileo non si sarebbero state mai rivelate inesatte se non fosse stato per l'elettromagnetismo: infatti le leggi di Maxwell non sono

invarianti per trasformazioni di Galileo, mentre lo sono quelle di Newton. In effetti la forma più semplice delle equazioni di Maxwell, si sarebbe ottenuta in un particolare riferimento inerziale 'privilegiato': questo rompe ogni simmetria, in quanto tutti gli osservatori, in sistemi di riferimento inerziali diversi, non si sarebbero potuti considerare equivalenti. La conseguenza assurda che va contro il primo principio di relatività è che si sarebbero potuti distinguere sistemi di riferimento inerziale con esperimenti di fisica (in particolare, di elettromagnetismo).

Per risolvere il problema, Lorentz costruì una serie di trasformazioni che legavano i sistemi K e K' nominati in precedenza: queste trasformazioni dovevano essere lineari e lasciare invariate in forma le equazioni di Maxwell, inoltre essere in accordo con gli esperimenti secondo cui $c = c'$.

Nel caso semplice che $O(t = 0) = O'(t' = 0)$ e $\vec{u} \parallel x \parallel x'$, Lorentz ottenne:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (1.11)$$

Più avanti, dopo aver introdotto le *linee* e le *superfici d'universo*, daremo una dimostrazione di come Lorentz sia giunto a queste trasformazioni.

Tuttavia esse non risolvevano il problema fondamentale: le trasformazioni di Galileo andavano bene per la dinamica quanto quelle di Lorentz per l'elettromagnetismo, ma come descrivere la dinamica di una particella carica in un campo e.m.?

Dunque, quali sono le trasformazioni che lasciano invarianti in forma sia le leggi della meccanica che quelle dell'elettromagnetismo? La risposta è riferimenti inerziali equivalenti rispetto ad entrambe.

1.6 Linee e superfici universo

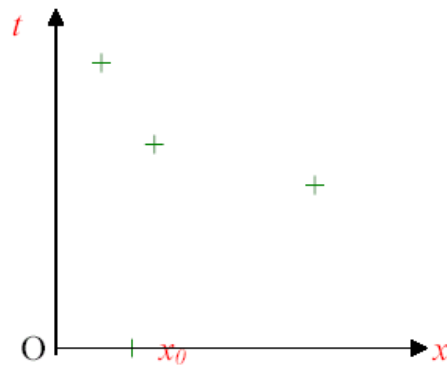
1.6.1 Spazio-Tempo e linee universo

Siamo in grado di conoscere l'evoluzione di un evento, per esempio il moto di una particella, attraverso le misure di diversi osservatori posti in diversi punti. Possiamo raccogliere questa informazione su di un grafico.

Immaginiamo per semplicità che il moto della particella avvenga lungo una direzione, per esempio quella che abbiamo individuato come asse delle

ascisse. Ogni evento sarà costituita da una coppia ordinata di numeri (x_n, t_n) , che precisano il tempo di passaggio della particella al nodo di coordinata x_n .

Posto che all'istante iniziale $t = 0$ la particella si trovi nel punto x_0 , sull'asse delle ascisse, negli istanti successivi si troverà in altri punti del piano Oxt , individuati dalle croci tracciate nella figura.

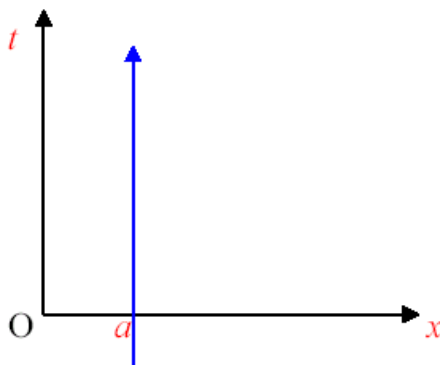


Se uniamo i punti della figura otteniamo una spezzata che individua il tracciato spazio-temporale della particella. Non si tratta ovviamente della traiettoria della particella, che è in questo caso l'asse delle x .

Si può idealmente pensare di effettuare una serie di misure su un reticolo assai fitto e in tempi molto ravvicinati. Questo consentirà di sostituire l'insieme di punti con una curva nel piano Oxt , che chiameremo **linea universo** (o linea oraria) della particella.

Notare che la linea universo è orientata: essa non può curvare verso il basso, perchè ciò equivarrebbe a tornare indietro nel tempo. Abbiamo quindi sostituito al nostro reticolo unidimensionale (asse x) con orologi ai nodi, un continuo spazio-temporale in due dimensioni, ogni punto del quale rappresenta un possibile evento. Gli eventi effettivamente osservati sono quelli rappresentati dai punti della linea universo.

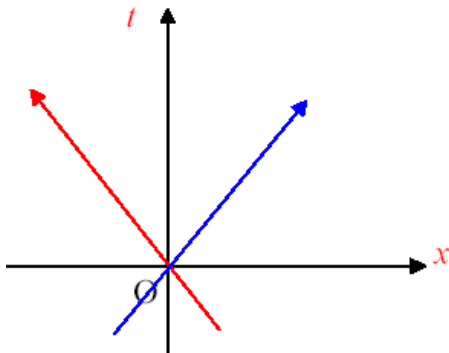
Possiamo approfondire il significato della linea universo considerando diverse possibili situazioni. Consideriamo prima il caso in cui la particella si muove su una retta.



Se la linea universo è una retta parallela all'asse dei tempi, essa rappresenta una particella ferma nella posizione $x = a$. Questa può anche vedersi come la linea universo di un osservatore fermo in a .

Se la particella si muove di moto uniforme lungo l'asse x , la sua linea universo è data da una retta. Se il moto è lungo il verso delle ascisse crescenti con legge oraria $x = vt$ la linea universo risulta come la retta blu in figura; se la legge è $x = -vt$ la linea universo è rappresentata dalla retta rossa.

Se la particella si muove di moto vario, la linea universo non è evidentemente data da retta ma dalla curva $t = t(x)$ del problema in esame.



Con riferimento a queste figure va osservato che la velocità è espressa dall'inverso del coefficiente angolare delle rette.

Questo è dato dalla tangente dell'angolo θ della retta orientata con l'asse delle ascisse. Se non si pongono limiti alle possibili velocità dei corpi, questo può variare tra valore infinito (positivo se la retta è parallela all'asse dei tempi con $\theta = \frac{1}{2}\pi$, negativo se $\theta = \frac{3}{2}\pi$) e zero (retta parallela all'asse delle ascisse).

La situazione cambia significativamente se si impone la condizione che la velocità della particella non superi una velocità limite (per esempio quella

della luce nel vuoto). In tale caso l'inclinazione della linea universo rispetto all'asse x non può essere inferiore a quella della retta universo di una particella che si muova con la velocità della luce.



Per meglio visualizzare questo fatto anziché usare la variabile tempo t , usiamo la variabile ct , che ha le dimensioni di una distanza (è la variabile che si usa ad esempio nella misura delle distanze astronomiche quando vengono espresse in anni luce). Essa è precisamente la distanza che percorre la luce nel tempo t .

La retta gialla nella figura rappresenta la propagazione di un raggio di luce a velocità c . Se indichiamo con θ l'angolo che una retta universo di una particella in moto con velocità costante v lungo l'asse delle ascisse forma con l'asse stesso avremo in generale che

$$\tan(\theta) = \frac{ct}{x} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}$$

Segue da ciò che l'insieme di eventi che corrisponde al passaggio di un segnale luminoso corrisponderà a una retta con $\theta = \frac{1}{4}\pi$ se il moto avviene nel verso delle x crescenti e con $\theta = \frac{3}{4}\pi$ se avviene nel verso decrescente.

La linea universo di un corpo che si muove lungo l'asse x di moto vario sarà una curva (vedi linea rossa in figura): tuttavia se assumiamo che l'oggetto non si possa muovere con velocità superiore a c , in ogni istante essa formerà con l'asse orizzontale un angolo maggiore di $\theta = \frac{1}{4}\pi$ (o maggiore di $\theta = -\frac{1}{4}\pi$).

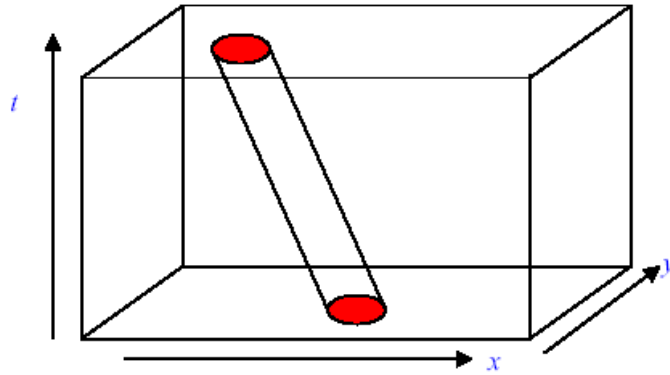
Quanto abbiamo detto per il moto di una particella in una dimensione può essere esteso ai casi in cui la particella si può muovere su un piano o in uno spazio fisico a più dimensioni.

Quanto detto è reperibile su <http://www.fisica.unimore.it>.

1.6.2 Spazio-Tempo e superfici universo

Può essere utile esaminare il caso di un moto piano, perchè esso ci aiuta a meglio comprendere il significato dello spazio-tempo come strumento per organizzare la nostra esperienza.

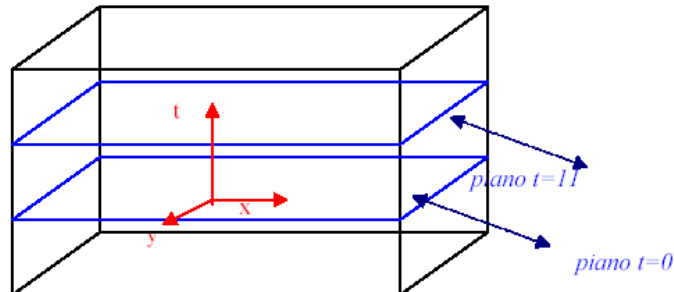
Vediamo come nel caso della biglia in moto sul piano del biliardo possiamo rappresentarne il moto con un tubo orientato obliquamente rispetto all'asse dei tempi, (tracciato nella figura) che rappresenta la superficie universo della biglia.



Si tratta di una superficie e non di una linea perchè abbiamo tenuto conto della dimensione finita della biglia (se la assimiliamo a un punto otteniamo una linea universo).

Se facciamo la stessa cosa per le biglie ferme troviamo che il loro moto è rappresentato da un tubo verticale, con asse parallelo all'asse dei tempi. Possiamo pensare di estendere questa costruzione a un qualunque evento che ha luogo in un piano, la cui evoluzione possa essere seguita dal nostro osservatore tramite successive fotografie.

In questo modo costruiamo lo spazio-tempo tridimensionale, che rappresenta storie di oggetti bidimensionali. In questo spaziotempo tutti gli eventi che hanno luogo a un certo istante sono situati su uno stesso piano ortogonale all'asse dei tempi.

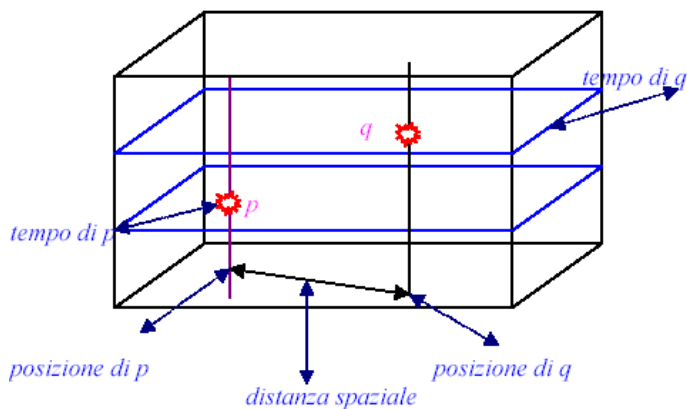


A titolo di esempio mostriamo nella figura il piano $t = 0$, che rappresenta l'insieme degli eventi che hanno luogo nel piano Oxy all'istante scelto come iniziale, e il piano $t = 11$, cui sono associati gli eventi che hanno luogo 11 unità di tempo (secondi, anni, millenni, etc.) dopo.

Nota: il parallelepipedo che tracciamo per rappresentare lo spazio tempo non indica che questo è limitato da qualche contorno, ma serve solo a meglio rappresentare le relazioni geometriche tra i punti.

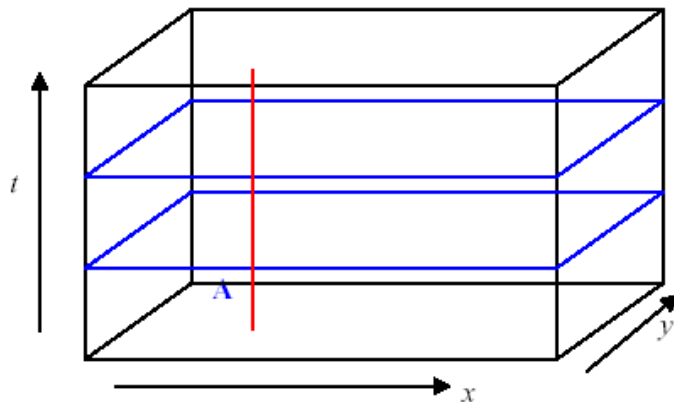
Consideriamo due eventi p e q . Le loro posizioni nello spazio sono rappresentate dalle rette verticali su cui essi si trovano. Per determinare la distanza spaziale tra i due eventi è sufficiente calcolare la distanza geometrica tra le due rette.

Allo stesso modo per calcolare il tempo trascorso dobbiamo calcolare la distanza tra

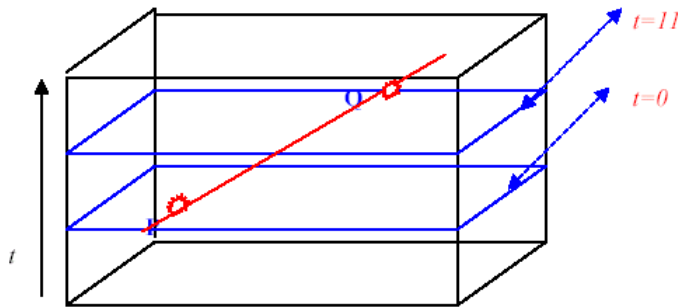


corrispondenti piani orizzontali.

Anche nel caso di un moto piano, la linea universo di una particella ferma è data da una retta parallela all'asse dei tempi.

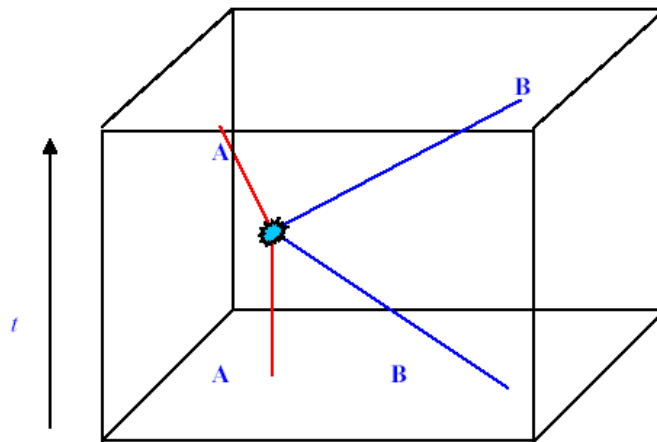


Nella figura la retta rossa è la linea universo di una particella ferma nel punto A del piano. Se la particella si muove di moto rettilineo uniforme sul piano la linea universo è una retta obliqua rispetto all'asse temporale.



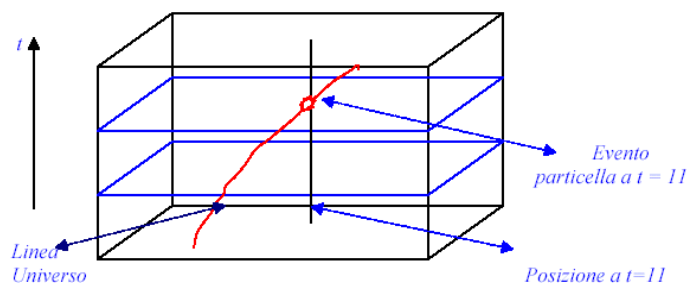
Nella figura i punti P e Q rappresentano rispettivamente le intersezioni della retta universo PQ con i piani $t = 0$ e $t = 11$.

Consideriamo ad esempio il diagramma spazio-temporale di una collisione tra particelle.

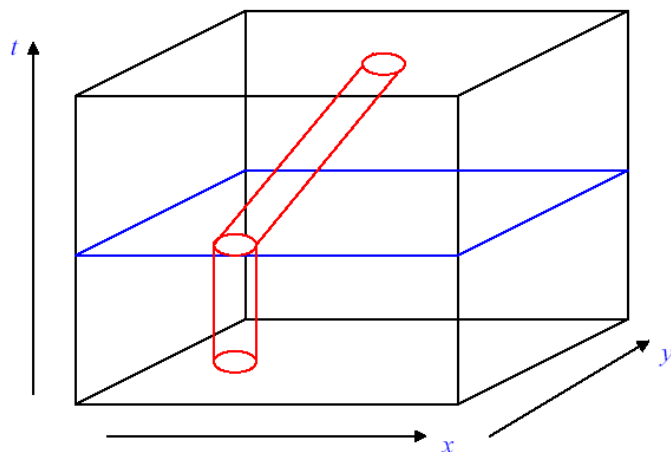


Prima della collisione la particella A è ferma, mentre la B si muove con traiettoria rettilinea a velocità costante. Dopo l'urto le due particelle si muovono in direzioni diverse con velocità costanti.

Allo stesso modo, se vogliamo domandarci quale evento fisico corrisponde nella storia di una particella a un dato tempo, per esempio $t = 11$, esso sarà definito dalla intersezione tra la linea universo della particella e il piano $t = 11$.



Non è difficile tracciare le superficie universo per qualche altro caso. Prendiamo per esempio quello della palla da biliardo, inizialmente ferma (tubo verticale), che si mette in moto all'istante iniziale. Avremo un diagramma del tipo indicato nella figura successiva

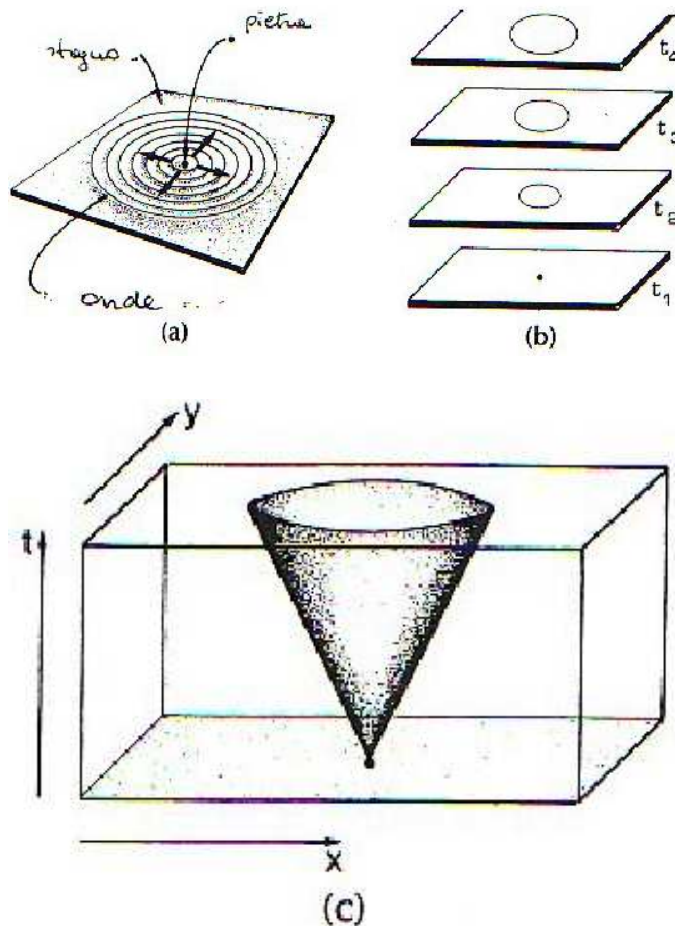


Qualche esempio interessante.

Immaginiamo di studiare il moto dell'acqua prodotto da uno sasso gettato in uno stagno. Posizioniamo la macchina fotografica su di un ponte prospiciente lo stagno.

Evidentemente il sasso crea delle onde di raggio crescente che si dipartono dal punto in cui il sasso è caduto. Se consideriamo la più esterna tra queste onde e la fotografiamo in tempi successivi possiamo constatare che la sua immagine è data appunto da un cerchio di dimensioni crescenti.

Supponendo di effettuare le fotografie a tempi molto ravvicinati, potremo costruire la superficie universo dell'onda, cioè quella che ne rappresenta l'evoluzione nello spazio-tempo $1 + 2$ (supponiamo che lo stagno sia una superficie piana).



Come si vede si tratta di una superficie conica. L'insieme degli eventi che la formano è dato dal passaggio dell'onda in punti differenti del piano al variare del tempo.

Si noti come questi eventi avvengano successivamente a quello iniziale (impatto del sasso nello stagno), che è stato assunto come evento origine. Naturalmente anche altre onde avranno superficie universo coniche; tuttavia essendosi formate in tempi successivi avranno come vertice punti dell'asse verticale corrispondenti a valori positivi del tempo e saranno contenute entro il cono della superficie universo dell'onda più esterna.

Come secondo caso consideriamo il moto di un pianeta attorno al Sole. Dato che le dimensioni e la massa dei pianeti sono assai piccole rispetto a quella del Sole possiamo considerare il pianeta come un punto materiale in moto attorno a un corpo sferico.

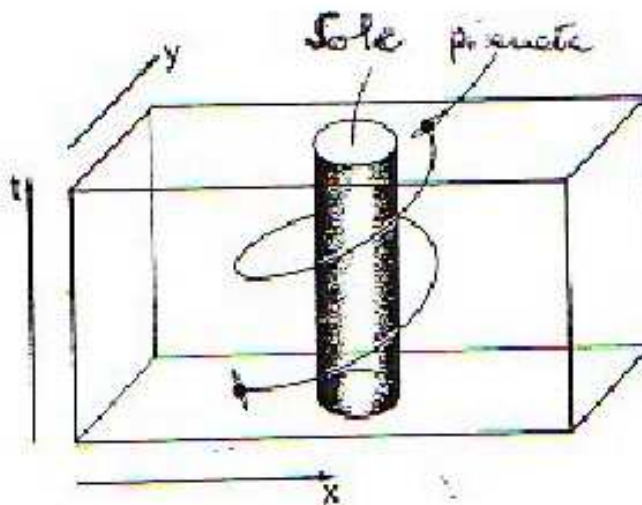
Supponiamo poi che l'orbita del pianeta possa essere considerata come

1.7. DEDUZIONE CLASSICA DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ 25

circolare (l'orbita è in realtà ellittica, ma per molti pianeti l'ellitticità è bassa e non si fa un grave errore utilizzando una circonferenza).

Il Sole sarà posizionato al centro dell'orbita. Prendiamo come origine del nostro sistema di riferimento il Sole: esso sarà quindi fermo e la sua superficie universo nello spaziotempo dato formato dall'asse temporale e dal piano dell'orbita sarà data da un cilindro.

Il pianeta si avvolgerà attorno a questo secondo una linea universo elioidale.



Quanto detto è reperibile su <http://www.fisica.unimore.it>.

1.7 Deduzione classica delle trasformazioni di Lorentz

Prima di iniziare la nostra trattazione, diamo una definizione e il seguente postulato fondamentale:

Definizione 1 Si definisce **evento** una variazione in un qualsiasi punto dello spazio-tempo.

Postulato 3 (Principio di invarianza degli eventi) Un qualunque sistema di riferimento inerziale e un qualunque sistema di riferimento non inerziale in relazione tra loro registrano lo stesso numero di eventi.

1.7.1 Trasformazioni $(\vec{x}, t) \longrightarrow (\vec{x}', t')$

Consideriamo un segnale luminoso che parte da un punto O fisso all'istante t_0 e che giunge fino ad un punto x che si muove con velocità u tornando poi indietro fino all'origine in un tempo complessivo totale t_2 .

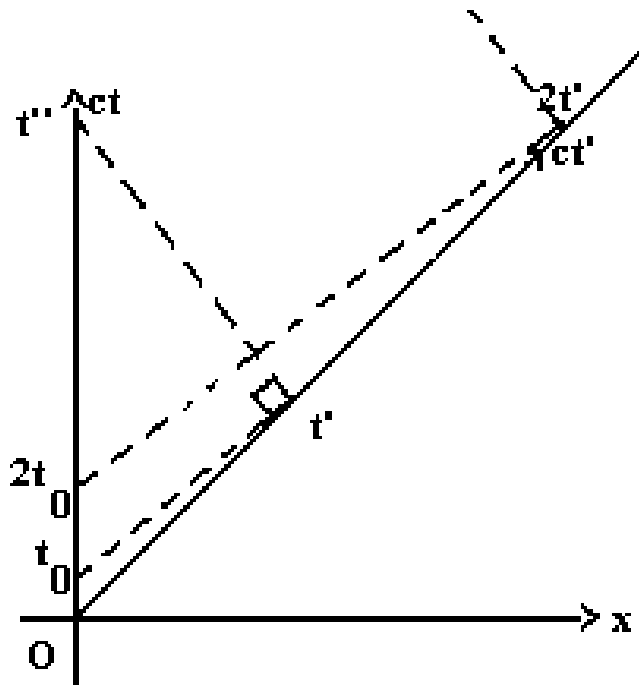
Allora la distanza percorsa può essere misurata soltanto conoscendo i tempi e il tempo totale t dalle relazioni

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}c(t_2 - t_1) \\ t &= \frac{1}{2}(t_2 + t_1) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Considerando un punto O' che si muove con velocità u rispetto a O , analogamente abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}c(t'_2 - t'_1) \\ t' &= \frac{1}{2}(t'_2 + t'_1) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Riportando su un grafico, consideriamo anche la linea di universo di O' :



Il segnale luminoso inviato a quello che supporremo un razzo parte all'istante t_0 e lo raggiunge all'istante t' per tornare riflesso indietro all'istante t'' .

1.7. DEDUZIONE CLASSICA DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ 27

Analoga situazione si ripete per un segnale inviato all'istante $2t_0, 3t_0, \text{etc.}$

Dunque $t' = kt_0$ perchè lati di triangoli simili e di conseguenza proporzionali... Inoltre $t'' = k't'$ per lo stesso motivo.

Per un osservatore sul razzo, il disegno è analogo, solo che l'asse inclinato, stavolta a $\frac{3}{4}\pi$, è ct . Ma anche per tale osservatore il grafico non cambia, dunque $t'' = kt'$.

Ma allora ricaviamo immediatamente che $k = k'$, cioè il lancio dalla Terra del segnale al razzo o viceversa è influente sulle costanti di proporzionalità in gioco, per cui si ha anche $t'' = k^2 t_0$.

Dalla relazione (1.12) possiamo calcolare la posizione del razzo:

$$x_R = \frac{1}{2}c(k^2 - 1)t_0 \quad (1.14)$$

ma è anche $\frac{x_R}{t} = u$ e

$$t = \frac{1}{2}(k^2 + 1)t_0$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} \frac{x_R}{t} &= \frac{1}{2}c(k^2 - 1)t_0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}(k^2 + 1)t_0} = u \implies \\ k &= \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

dove se $\frac{u}{c} > 1$ avremmo numeri immaginari, dunque $u < c$ sempre.

Supponiamo adesso che vi sia un'esplosione. Ci chiediamo *dove* e *quando* essa sarà vista dal sistema di riferimento in quiete (Terra) e da quello in moto (Razzo), per determinarne le relazioni.

Le equazioni che descrivono in coordinate spazio-temporali il tutto sono date dalle relazioni (1.12) e (1.13), ovvero:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}c(t_2 - t_0) \\ t &= \frac{1}{2}(t_2 + t_0) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}c(t'_1 - t') \\ t' &= \frac{1}{2}(t'_1 + t') \end{aligned} \quad (1.17)$$

Da quanto detto in precedenza si ottiene subito che $t' = \frac{1}{k}t_2$ e che pertanto si hanno le equazioni

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{k}t_2 - kt_0\right) \\ t' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}t_2 + kt_0\right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dal sistema

$$\begin{cases} t_2 - t_0 = 2\frac{x}{c} \\ t_2 + t_0 = 2t \end{cases} \implies \begin{cases} t_2 = t + \frac{x}{c} \\ t_0 = t - \frac{x}{c} \end{cases} \quad (1.19)$$

che sostituendo alle precedenti porta a

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}\left(t + \frac{x}{c}\right) - k\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \implies \\ \implies 2\frac{x'}{c} &= \left(k + \frac{1}{k}\right)\frac{x}{c} - \left(k - \frac{1}{k}\right)t \end{aligned} \quad (1.20)$$

dalla (1.15) si ottiene che

$$k + \frac{1}{k} = \frac{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}} + 1}{\sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}}} \quad (1.21)$$

da cui, sostituendo nella (1.20) si arriva a

$$\begin{aligned} 2\frac{x'}{c} &= \frac{2\frac{x}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{2\frac{u}{c}t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ \implies x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

che è la trasformazione di Lorentz per lo spazio lungo la direzione del moto. Da questa e dalle precedenti scaturisce subito la trasformazione per il tempo, e considerando che $y = y'$ e $z = z'$ per come abbiamo assunto il sistema di riferimento, avremo le **trasformazioni di Lorentz per lo spazio e per il tempo**:

$$\begin{cases} x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (1.23)$$

Per il principio di relatività, le trasformazioni inverse si ottengono semplicemente sostituendo $-u$ a u e scambiando le variabili accentate di posto:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (1.24)$$

1.7.2 Trasformazioni delle velocità

Per definizione:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad (1.25)$$

per cui, dalle trasformazioni di Lorentz per lo spazio e per il tempo, si ha:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx - udt}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} \implies \\ &v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} \end{aligned} \quad (1.26)$$

che non è più una relazione lineare. Analogamente:

$$\begin{aligned} v'_y &= \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dy'}{dt - \frac{u}{c^2} dx} \implies \\ &v'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Come si può notare, v'_y dipende oltre che da t e da v_y , dipende anche da v_x , cosa questa che non era prevista dalle trasformazioni di Galileo.

Se avessimo provato a calcolare la velocità lungo l'asse z avremmo trovato una relazione simile alla (1.27), con la sola differenza che alla variabile y viene sostituita la z .

1.8 Deduzione di Einstein delle trasformazioni di Lorentz

Ho preferito dedurre in questi due modi sostanzialmente diversi le trasformazioni di Lorentz per evidenziare come esse siano profondamente legate alla meccanica newtoniana (nel primo caso) e ai rivisti concetti di simultaneità e misura (secondo caso).

1.8.1 Simultaneità di eventi

Le trasformazioni di Galileo non sono effettivamente esatte per via dell'assunzione assiomatica che $t = t'$: questo implica che due eventi simultanei in un sistema di riferimento inerziale, lo sono anche in altri.

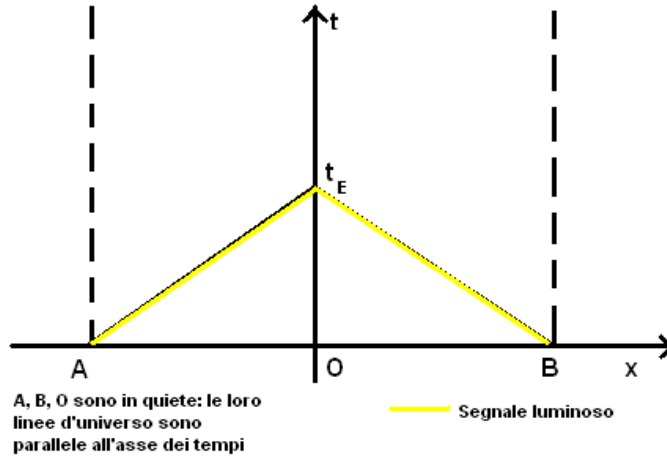
Se gli eventi accadono nello stesso punto, non è difficile verificarne la simultaneità, altrimenti definiamo che:

Definizione 2 *Due eventi in due punti diversi dello spazio-tempo si dicono simultanei se e solo se giungono contemporaneamente, allo stesso istante, ad un osservatore posto in un sistema di riferimento inerziale (s.r.i.) in quiete K .*

Se A e B sono i due punti da cui partono uguali segnali simultaneamente (l'evento che consideriamo per esempio), e O è posto in quiete rispetto a loro e nel punto medio della loro congiungente, allora O li rileverà *contemporaneamente*.

Consideriamo adesso un altro osservatore $O' \equiv O$ inizialmente, ma che si muove rispetto a O verso B (non cambierebbe nulla se verso A) con velocità costante \vec{u} parallela alla congiungente. E' evidente, che poichè la velocità della luce non è infinita³, O' rileverà prima il segnale proveniente da B e poi quello da A . Di conseguenza, i due eventi non sono simultanei in K' !

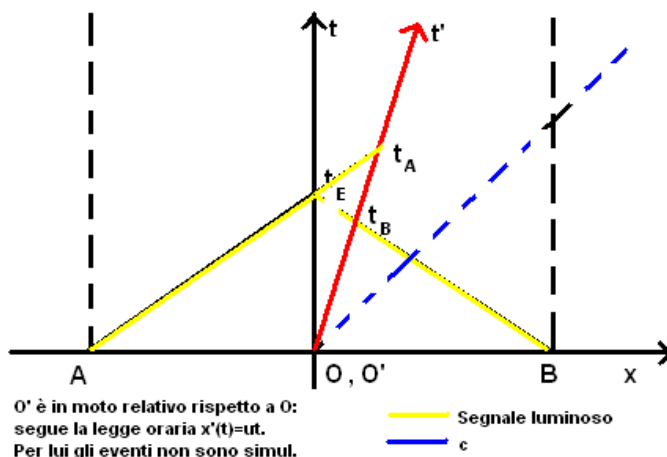
Rappresentiamo quanto detto con le linee d'universo:



In questo primo caso i segnali raggiungono O in K allo stesso istante t_E . Invece per O' in K' le cose vanno diversamente:

³Questa è la pesante assunzione di Einstein, basata di fatto su prove sperimentali.

1.8. DEDUZIONE DI EINSTEIN DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ 31



È evidente che $t_A \neq t_B$, per cui due eventi simultanei in uno dei due s.r.i. in moto relativo tra loro non sono tali nell'altro e viceversa. Come legare le misure dei tempi, ovvero l'istante t_E a quello t'_E ?

1.8.2 La fisica dei regoli e degli orologi

Einstein introduce una vera e propria fisica di regoli e orologi per spiegare le conseguenze dei moti relativi.

Definizione 3 *Definiamo lunghezza di un regolo la distanza tra i punti occupati dai suoi estremi allo stesso istante.*

Questo prevede, e ci anticipa, che è possibile che per via della simultaneità in un s.r.i. ma non un altro, trattata nel paragrafo precedente, anche sulle misure dei regoli, O e O' potrebbero non essere d'accordo.

Si considerino $O \in K$ e $O' \in K'$ in quiete nei loro s.r.i., ma in moto relativo nell'altro e ognuno di loro ne sia l'origine. Inoltre si supponga che entrambi dispongano di un orologio e di un regolo unitario, identici e costruiti allo stesso modo. Siano $[1_O]_O$ e $[1_{O'}]_{O'}$ rispettivamente le misure che O e O' fanno del loro regolo nel loro rispettivo s.r.i.

Siamo nell'ipotesi che $[1_O]_O = [1_{O'}]_{O'}$, cosa possiamo dunque dire delle misure che ognuno fa del regolo dell'altro? Poiché tra i due osservatori non ve ne è uno privilegiato poiché sono equivalenti, le misure che essi fanno del regolo dell'altro deve coincidere:

$$\frac{[1_O]_{O'}}{[1_{O'}]_{O'}} = \frac{[1_{O'}]_O}{[1_O]_O} \implies [1_O]_{O'} = [1_{O'}]_O \quad (1.28)$$

Consideriamo due casi di moto: nel primo, i due regoli sono disposti perpendicolarmente alla direzione del moto, nel secondo parallelamente.

Nel primo caso, dotiamo gli estremi dei regoli di due pennarelli: quando essi si incontreranno, in caso di misure diverse, uno lascerà i segni del suo passaggio sull'altro e i due osservatori non potranno che essere d'accordo. Per esempio se per $[1_O]_{O'} < [1_{O'}]_{O'}$ e $[1_O]_O < [1_{O'}]_O$, poichè $[1_{O'}]_{O'} = [1_O]_O$ si avrebbe $[1_O]_{O'} < [1_{O'}]_O$, cioè i due osservatori non sarebbero equivalenti. Questo assurdo implica subito che deve essere di contro $[1_O]_{O'} = [1_{O'}]_O$.

Se nel primo caso, le lunghezze dei regoli non subiscono variazioni, nel secondo la situazione è diversa. Assunti $O(t=0) \equiv O'(t'=0)$ e che O' si muove con velocità \vec{u} nel verso delle $x' \parallel x$ positive (dunque per O la velocità di O' è \vec{u} , mentre per O' in K' la velocità di O è $-\vec{u}$) e che inoltre i due osservatori siano solidali con le origini dei rispettivi s.i.r., abbiamo che in generale

$$\frac{[1_O]_O}{[1_O]_{O'}} = \lambda \neq 1$$

$$\frac{[1_{O'}]_{O'}}{[1_{O'}]_O} = \lambda \neq 1$$

da cui

$$\frac{[1_O]_O}{[1_O]_{O'}} = \frac{[1_{O'}]_{O'}}{[1_{O'}]_O} = \lambda \neq 1 \quad (1.29)$$

Il numero adimensionale λ non può dipendere dalle coordinate (\vec{x}, t) nè dalla direzione o dal verso di \vec{u} : sarà quindi funzione del modulo di \vec{u} , $\lambda = \lambda(u) > 0$.

Dato un generico punto P dello spazio-tempo, si avrà dunque

$$\vec{x} = O\vec{O}' + O\vec{P} = \vec{u}t + \frac{\vec{x}'}{\lambda} \quad (1.30)$$

avendo indicato con $O\vec{P}$ la misura di O e con $\frac{\vec{x}'}{\lambda}$ la misura di O' per via della relazione (1.29). Dunque, risolvendo per x' si ottiene

$$\vec{x}' = \lambda(\vec{x} - \vec{u}t) \quad (1.31)$$

e per la simmetria imposta al sistema $[(x', t') \longrightarrow (\vec{x}, t)]$ e $\vec{u} \longrightarrow -\vec{u}$

1.8. DEDUZIONE DI EINSTEIN DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ 33

$$\vec{x} = \lambda(\vec{x}' + \vec{u}t') \quad (1.32)$$

Sostituendo la (1.32) nella (1.31) e risolvendo rispetto al tempo t :

$$\vec{x} = \lambda[\lambda(\vec{x}' + \vec{u}t') - \vec{u}t] \implies t = \lambda(t' + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2} \frac{\vec{x}'}{\vec{u}}) \quad (1.33)$$

e per la simmetria:

$$t' = \lambda(t - \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2} \frac{\vec{x}}{\vec{u}}) \quad (1.34)$$

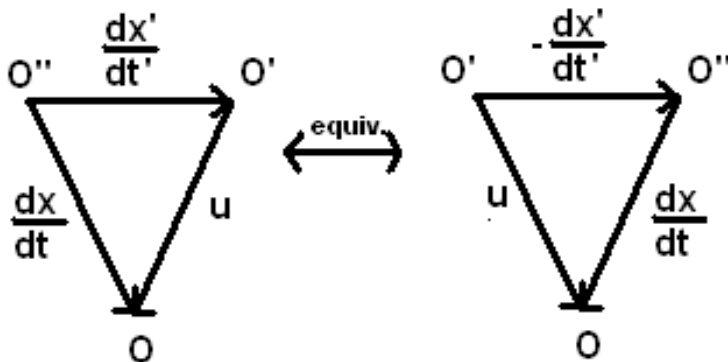
Da notare, che se fosse $\lambda = 1$ si avrebbero le trasformazioni di Galileo. A questo punto, differenziando le (1.31) e (1.34) troviamo:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 + \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \frac{1}{u} \frac{dx}{dt}} \quad (1.35)$$

ovvero una nuova regola per la composizione delle velocità ben diversa da quella di Galileo.

Consideriamo adesso un altro osservatore $O'' \equiv P$ nell'origine di un s.r.i. K'' : esso avrà velocità relativa $\frac{dx}{dt}$ rispetto a O e $\frac{dx'}{dt'}$ rispetto a O' (poichè è stato assunto $O'' \equiv P$); se invertiamo i punti di vista di O' e O'' nulla dovrebbe cambiare, data la simmetria del sistema.

Quanto detto può essere riassunto in figura:



Per cui, dalla (1.35), e tenendo conto che abbiamo invertito O' e O'' abbiamo:

$$-\frac{dx'}{dt'} = \frac{u - \frac{dx}{dt}}{1 + \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} u} \quad (1.36)$$

dove $\mu = \lambda(\frac{dx}{dt})$. Eguagliando i denominatori delle (1.35) e (1.36) per la simmetria, otteniamo:

$$\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \frac{1}{u^2} = \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} \frac{1}{(\frac{dx}{dt})^2} \quad (1.37)$$

Poichè questa vale per ogni u e $\frac{dx}{dt}$ indipendenti tra loro, possiamo affermare che

$$\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \frac{1}{u^2} = \pm \frac{1}{c_0^2} \implies \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}} \quad (1.38)$$

Poichè λ è un rapporto di lunghezze, dobbiamo mantenere solo il segno $+$ nella (1.38)⁴.

Andando a sostituire quanto trovato nella (1.35) otteniamo:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 \pm \frac{u}{c_0^2} \frac{dx}{dt}} \quad (1.39)$$

Supponiamo adesso che un segnale si muova con velocità $\frac{dx}{dt} = c_0$, avremo dalla precedente che (imposto anche $\frac{dx'}{dt'} = c_0$ per l'equivalenza tra i sistemi):

$$\frac{dx'}{dt'} = c_0 = c_0 \frac{c_0 - u}{c_0 \pm u} \quad (1.40)$$

che è verificata se e solo se scegliamo a denominatore il segno $-$ e imponiamo che $c_0 \neq u$. Un segnale di questo genere esiste ed è quello luminoso: $c_0 = c$, indicando con c la velocità della luce nel vuoto. Otterremo in definitiva $\gamma = \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ ⁵, e indicando con $\beta = \frac{u}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Per quanto detto finora, le trasformazioni per lo spazio-tempo di Lorentz si possono dunque riassumere nelle seguenti:

⁴Un rapporto tra quantità positive è positivo.

⁵Fattore di contrazione di Lorentz.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \quad (1.41)$$

e per le condizioni di relatività anche

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases} \quad (1.42)$$

Di conseguenza, per le velocità:

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dy}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dz}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} \end{cases} \quad (1.43)$$

e per le condizioni di relatività anche

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dy'}{dt'}}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{dz'}{dt'}}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \end{cases} \quad (1.44)$$

esattamente come nella deduzione classica.

Da notare che anche le componenti di v' variano pur essendo il moto di $x' \parallel x$: questo è dovuto al fatto che $t \neq t'$.

Le evidenze sperimentali di quanto trovato teoricamente sono presto arrivate con Michelson e Morley, Kennedy e Thordike⁶.

⁶Questi ultimi con l'ipotesi di trascinamento dell'etere.

1.9 Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

1.9.1 Il fattore di Lorentz: trasformazioni a confronto

Una volta definito il fattore di Lorentz, abbiamo visto che le trasformazioni di Lorentz per lo spazio, il tempo e le velocità possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \quad (1.45)$$

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\ v'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\ v'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \end{cases} \quad (1.46)$$

Le trasformazioni di Galileo sono rispettivamente

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.47)$$

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u_x \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad (1.48)$$

Da notare è dunque come quest'ultime siano un'approssimazione delle prime quando $\gamma \approx 1$, cioè quando $v \ll c$.

1.9.2 Dilatazioni e contrazioni spazio-temporali

A questo punto siamo in grado di interpretare la vera natura degli oggetti in moto relativo rispetto ad altri: per essi le lunghezze misurate sono diverse così come gli intervalli di tempo.

Partiamo dalla deduzione classica.

Principalmente, analizzando le trasformazioni di Lorentz si nota che un orologio fermo sul razzo misura un intervallo di tempo $\Delta t' = t'_1 - t'$, mentre

chi sta sulla Terra misura un intervallo $\Delta t = t_1 - t_0$, che per quanto è stato appena detto conduce a

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{1}{2}(t_2 + t_1) - \frac{1}{2}(t'' + t_0) = \\ &= \frac{1}{2}(kt'_1 + \frac{1}{k}t'_1) - \frac{1}{2}(kt' + \frac{1}{k}t') = \frac{1}{2}(k + \frac{1}{k})\Delta t' \implies \\ &\implies \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\Delta t'\end{aligned}$$

che è la prima equazione fondamentale delle relatività ristretta, che stabilisce la dilatazione dei tempi.

Infatti, detto $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ il fattore di Lorentz, ci si rende subito conto che per $u < c$ si ha $\Delta t < \Delta t'$, cioè *il tempo passa più lentamente in un sistema di riferimento inerziale in moto rispetto a uno in quiete*.

Analogamente, per misurare la lunghezza del razzo i due sistemi avranno $x'_1 - x'_0 = l_0$ e $x_1 - x_0 = l$, ottenute dal razzo e dalla Terra rispettivamente. Ma

$$x_0 = \frac{1}{2}c(t'' - t_0) \quad , \quad x_1 = \frac{1}{2}c(t'_1 - t_0) \implies l = \frac{1}{2}c(t'_1 - t'')$$

ma poichè $t'_1 + t_1 = t'' + t_0$, vediamo che

$$t_0 = \frac{1}{2}(t'_1 + t_1) = t_1 = \frac{1}{2}(t'' + t_0)$$

perciò

$$\begin{aligned}l &= \frac{1}{2}c[(t'' - t_0) - (t'_1 - t_1)] = c(t'' - t'_1) = c(t_1 - t_0) \\ & \qquad \qquad \qquad l_0 = \frac{1}{2}c(t'_2 - t')\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}t'_2 &= 2\frac{l_0}{c} + t' = \frac{1}{k}t'' = 2\frac{l_0}{c} + t' \quad [t'_1 - t' = k(t_1 - t_0)] \implies \\ &\implies l = c(2\frac{l_0}{c}k + kt' - kt'_1) = c(2\frac{l_0}{c}k - k\frac{l}{c}) = \\ &= 2l_0k - k^2l \implies \frac{1 + k^2}{2k}l_0 \implies \\ &\implies l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\end{aligned}$$

che è la seconda equazione fondamentale delle relatività ristretta, che stabilisce la dilatazione dei tempi.

Infatti, detto $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ il fattore di Lorentz, ci si rende subito conto che per $u < c$ si ha $l_0 > l$, cioè *le lunghezze sono minori in un sistema di riferimento inerziale in moto rispetto a uno in quiete*.

Possiamo riassumere le due equazioni fino ad ora trovate in

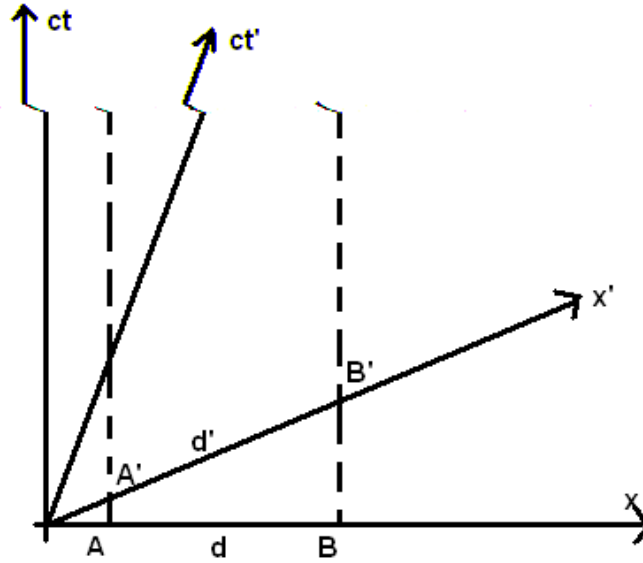
$$\Delta t = \frac{1}{\gamma} \Delta t' \quad (1.49)$$

$$\Delta l = \gamma \Delta l' \quad (1.50)$$

dove le variabili accentate rappresentano le misure fatte da chi si trova nel sistema di riferimento in moto e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ è il fattore di Lorentz.

Partendo invece dalla deduzione di Einstein (come faremo di qui in seguito) ci si rende conto come queste implicazioni sono molto più semplici da verificare.

Si noti la figura:



L'angolo tra ct' e ct è uguale a quello tra x' e x , ed entrambi i riferimenti sono bisecati dalla retta $x=ct$.

Si ha:

$$d = x_B - x_A = x_{B'} - x_{A'} = \gamma(x'_{B'} - x'_{A'}) = \gamma d' \implies d' = \frac{1}{\gamma} d \quad (1.51)$$

cioè un osservatore in moto rispetto a un regolo, lo vede contratto di un fattore $\frac{1}{\gamma}$ rispetto all'osservatore in quiete.

Rovesciando i punti di vista, cioè scambiando gli indici nei riferimenti, si otterrebbe $d = \frac{1}{\gamma}d'$, e ancora una volta l'osservatore in moto rispetto a un regolo, lo vede contratto di un fattore $\frac{1}{\gamma}$ rispetto all'osservatore in quiete.

Identicamente per quanto riguarda i tempi, si ottiene che se K' è il s.r.i. in moto rispetto a K allora $\Delta t' = \gamma \Delta t$: al posto di una contrazione, si osserva una dilatazione.

La vita media dei muoni

Consideriamo una particella instabile, in quiete in O' e sia t'_E l'istante in cui O' la vede decadere. Tale particella sia un muone presente nei raggi cosmici, di carica $\pm e$, massa $105.66 MeV$, spin $\frac{1}{2}$ e vita media $t_{\frac{1}{2}} = 1.5 \cdot 10^{-6} s$.

Supponiamo che una volta raggiunta la Terra, se ne osservino ad un'altezza $h = 4500 m$ circa 1000. Quanti se ne osserveranno a livello del mare? Per loro è $\beta = 0.995$ e $\gamma = 10$.

Classicamente si risponde tenendo conto che nel tempo di caduta $t = \frac{h}{v} = \frac{h}{\beta c} \simeq 1.5 \cdot 10^{-5} s = 10 t_{\frac{1}{2}}$ il fascio di muoni si dimezzerebbe dunque 10 volte, e di conseguenza $N = \frac{N_0}{2^{10}} \simeq 1$. In realtà se ne osservano 500!

Di fatto il muone non vede una distanza h per via della sua velocità altissima, ma vede $h' = \frac{1}{\gamma} h$ cioè 10 volte più piccola (quindi la percorre in $t_{\frac{1}{2}}$), dunque $N = \frac{N_0}{2} \simeq 500$. Lo stesso risultato si ottiene notando che il tempo di dimezzamento osservato da terra è $t'_{\frac{1}{2}} = \gamma t_{\frac{1}{2}}$.

1.9.3 Trasformazioni generali

Abbiamo ottenuto le trasformazioni di Lorentz nel caso particolare $O \equiv O'$ all'istante 0 e $x' \parallel x$. In generale se il moto non è parallelo a uno degli assi si considera la velocità relativa \vec{u} e il raggio vettore può essere scomposto nelle componenti parallela e perpendicolare a \vec{u} : $\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}$.

Poichè $\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{u^2}$, si avrà:

$$\begin{cases} \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp} \\ \vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \beta ct) \\ t' = \gamma(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2}) \end{cases} \quad (1.52)$$

Poichè $\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - \vec{u}t) + \vec{r}_{\perp}$ e inoltre $\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$, si avrà

$$\vec{r}' = \gamma \left(\frac{(\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u}}{u^2} - \vec{u}t \right) + \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u}}{u^2}$$

da cui:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u}}{u^2} - \gamma \vec{u}t \\ t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c^2} \right) \end{cases} \quad (1.53)$$

e, poichè $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$ e $\vec{v}' = \frac{dx'}{dt'}$:

$$\vec{v}' = \frac{1}{\gamma} \frac{\vec{v} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}}{v^2} - \gamma \vec{u}}{1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}} \quad (1.54)$$

Per $\vec{u} \equiv (u_x, 0, 0)$ si trovano i risultati precedenti.

1.10 Lo spazio di Minkowsky

Finora abbiamo deliberatamente utilizzato linee e superfici d'universo: questo è possibile se ci troviamo in uno *spazio di Minkowsky*, ovvero un'estensione del comune spazio tridimensionale con l'aggiunta della dimensione temporale, concretizzata come un'ulteriore dimensione spaziale, in cui un punto, per distinzione, viene chiamato 'evento', e dove si fa uso di una geometria non euclidea.

D'ora in avanti sottointendiamo che ci muoviamo in questo spazio, e che un evento E è individuato dalle 4 coordinate (x_0, \vec{x}) .

1.10.1 L'intervallo quadro

Nello spazio euclideo abbiamo osservato che l'intervallo tra due punti (la comune distanza euclidea) era invariante per trasformazioni di coordinate. Ma questo rimane vero per esso solo ed esclusivamente a causa della sua topologia (è uno spazio metrico particolare). Se vogliamo, tale distanza resta invariata per rotazioni.

In effetti, se sostituiamo opportunamente alle trasformazioni di Lorentz nella forma attuale, le funzioni trigonometriche iperboliche e il parametro di rapidità ξ , possiamo considerarle come vere e proprie rotazioni nello spazio di Minkowsky.

Un invariante fondamentale ivi è l'*intervallo quadro* tra due eventi, definito come

$$-I^2(E_1, E_2) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 \quad (1.55)$$

Il suo equivalente, in altro riferimento K' in moto sarà

$$-I'^2(E_1, E_2) = (\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2)^2 - c^2(t'_1 - t'_2)^2 \quad (1.56)$$

Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned} x'_1 - x'_2 &= \gamma[(x_1 - x_2) - \beta c(t_1 - t_2)] \\ c(t'_1 - t'_2) &= \gamma[c(t_1 - t_2) - \beta(x_1 - x_2)] \end{aligned}$$

per cui, quadrando entrambe e sottraendo membro a membro:

$$\begin{aligned} (x'_1 - x'_2)^2 - c^2(t'_1 - t'_2)^2 &= \gamma^2[(1 - \beta^2)(x_1 - x_2)^2 - (1 - \beta^2)c^2(t_1 - t_2)^2] = \\ &= (x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 \end{aligned}$$

ricordando le definizioni di γ e β . Da queste ne segue la fondamentale

$$I^2(E_1, E_2) = I'^2(E_1, E_2) \quad (1.57)$$

ottenuta sottraendo le due equazioni per I^2 e I'^2 . Questo significa che esso è un invariante.

Definiamo meglio l'intervallo come

$$I(E_1, E_2) = \sqrt{|I^2(E_1, E_2)|} \quad (1.58)$$

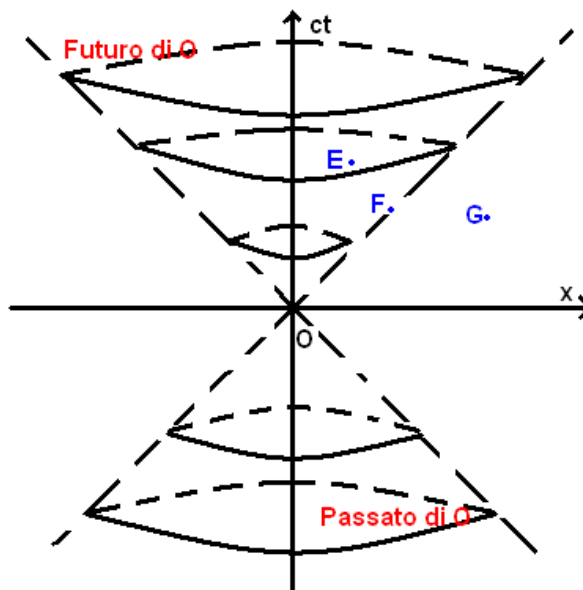
da cui distinguiamo 3 generi:

- **Temporale:** se i due eventi non sono simultanei in nessun s.r.i.;
- **Spaziale:** se i due eventi non sono nello stesso posto in nessun s.r.i.;
- **Luminoso:** se $I = 0$, cioè a $v = c$.

Da quanto detto finora si dimostra immediatamente che due eventi in successione in un s.r.i. non saranno mai visti nella successione inversa in nessun altro s.r.i.

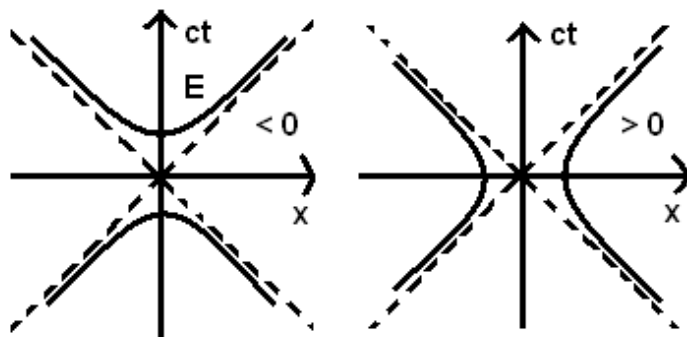
1.10.2 Coni di luce e iperboli degli eventi

Ponendo nell'origine di un nuovo s.r.i. uno dei due eventi, otteniamo qualcosa simile a quello in figura:



detto *cono di luce di O*. Si nota subito che $I^2(OE) > 0$ ($ct > x$), $I^2(OG) < 0$ ($ct < x$), $I^2(OF) = 0$ ($ct = x$). Il cono di luce è individuato proprio da quest'ultima equazione.

Invece l'equazione ridotta $-x^2 + c^2t^2 = I^2(OE)$ individua il luogo degli eventi che formano con l'origine un intervallo uguale a quello formato con E : geometricamente esso è rappresentato da un'iperbole equilatera con vertice in O e le rette di luce per asintoti, mostrate in figura.



rispettivamente per I^2 minore o maggiore di 0. Ruotando il sistema si ottiene un iperboloide a due falde: questo rende definitiva la frattura con la geometria euclidea.

Utilizzando le iperboli (e quindi tramite considerazioni sugli intervalli) si possono facilmente dimostrare le contrazioni delle lunghezze e le dilatazioni temporali dovute alle trasformazioni di Lorentz (ma è più complesso pervenire alla loro forma), considerando i soliti due sistemi (ct, x) e (ct', x') e il ramo del primo quadrante della seconda e della prima iperbole rispettivamente.

Capitolo 2

Dinamica relativistica

2.1 Il quadrivettore

Definizione 4 Dato un evento dello spazio di Minkowsky, esso risulta individuato da una quaterna di coordinate $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{x})$ definita quadrivettore.

Si nota subito che $x^0 = ct$ mentre \vec{x} coincide con le 3 comuni coordinate spaziali.

Nello spazio di Minkowsky si utilizza questa naturale estensione del comune concetto di vettore, in quanto permette di porre in rilievo molte simmetrie nelle equazioni e tra equazioni diverse.

In questo modo le trasformazioni di Lorentz possono scriversi in forma estesa:

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad (2.1)$$

in cui adesso è molto più evidente la simmetria.

2.1.1 Componenti covarianti e controvarianti

I quadrivettori sono di due generi nello spazio di Minkowsky (d'ora in avanti spazio S_M): *covariante* o *controvariante*.

Definizione 5 Si dice che un vettore è controvariante se si trasforma con legge

$$a'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} a^\beta \quad (2.2)$$

dove $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = J$ è lo jacobiano della trasformazione.

Definizione 6 Si dice che un vettore è covariante se si trasforma con legge

$$b'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} b_\beta \quad (2.3)$$

dove $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = J^{-1}$ è l'inverso dello jacobiano della trasformazione.

Da queste definizioni diventa chiaro che il quadrivettore dx^μ è controvariante, e da esso, si conclude per integrazione che è tale anche il quadrivettore x^μ .

2.2 La matrice di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono, come richiesto, lineari. E' dunque lecito chiedersi se esiste un'applicazione lineare (una matrice) che possa esprimerle in forma compatta.

Essa esiste, è simmetrica e si indica con $\Lambda \equiv \Lambda_\nu^\mu$:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da cui le trasformazioni di Lorentz in forma compatta:

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (2.4)$$

manifestamente controvariante. Le trasformazioni inverse, come ci insegna l'algebra delle matrici, saranno

$$x^\rho = (\Lambda^{-1})_\mu^\rho x'^\mu \quad (2.5)$$

di matrice inversa

$$(\Lambda^{-1})_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Algebra dei 4-vettori: il tensore metrico

Poichè definire i tensori trascende questa trattazione ci limitiamo a dire che esso, di rango 2, rappresenta il più generale prodotto tra 2 vettori e si indica con $T_{\mu\nu}$ o $T^{\mu\nu}$ (per il tipo covariante o controvariante) o T_{ν}^{μ} (tipo misto).

Un tensore di rango 1 è un normalissimo vettore (nel nostro caso, un quadrivettore) e la traccia di un tensore di rango 2 è il comune prodotto scalare tra 2 vettori.

Man mano nella trattazione esauriremo altre proprietà per il tensore specifico in studio.

Come è possibile passare da componenti covarianti a componenti controvarianti e viceversa? Abbiamo bisogno anche qui di una matrice di trasformazione lineare, che per motivi precisi viene chiamata *tensore metrico* o *della metrica*.

Tale tensore di rango 2 (una matrice appunto) è definito come

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si noti che $g_{\mu\nu}$ è simmetrico, cioè $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$; inoltre è anche $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ per questioni metriche, e di conseguenza $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu}$, ovvero il δ di Kronecker.

A questo punto si possono definire le leggi di trasformazione in S_M tramite il tensore metrico:

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu}a^{\nu} \quad a^{\mu} = g^{\mu\nu}a_{\nu} \quad (2.6)$$

che fanno passare da componenti covarianti a controvarianti. Infine puntualizziamo che $a_{\mu} \equiv (a_0, \vec{a})$ e $a^{\mu} \equiv (a_0, -\vec{a})$.

2.4 Invarianti

2.4.1 L'intervallo ds

Abbiamo mostrato in precedenza che l'intervallo $I^2 = ds^2$ è un invariante. Esso si può esprimere quindi come $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$ da cui $ds = c dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2} = \frac{1}{\gamma} c dt$. Sappiamo che ds è invariante, come c , tuttavia dt non è invariante; definendo l'invariante¹ $d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$, avremo $ds = c d\tau$.

¹Questa invarianza è dovuta all'invarianza di ds e c per la proprietà transitiva.

A questo punto posso definire l'operatore invariante

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \quad (2.7)$$

che sarà utile quando parleremo di dinamica.

Inoltre

$$dx^\mu \equiv (cdt, d\vec{r}) \equiv g^{\mu\nu} dx_\nu \implies ds^2 = ds \cdot ds = dx_\mu dx^\mu \quad (2.8)$$

poichè per la sua definizione è $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g^2 = 1$.

2.4.2 Prodotto scalare e vettoriale

Dati i due quadrivettori A e B , il loro prodotto scalare $A_\mu B^\mu$ si verifica essere invariante:

$$A'_\mu B'^\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu A_\nu \Lambda^\mu_\rho B^\rho = A_\nu B^\nu \quad (2.9)$$

Risulta invariante anche il loro prodotto vettoriale $A_\mu B_\mu = T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} A'_\mu B'_\nu &= \Lambda^\rho_\mu A_\rho \Lambda^\sigma_\nu B^\sigma = \Lambda^\rho_\mu (A_\rho B^\sigma) \Lambda^\sigma_\nu = \\ &= \Lambda^\rho_\mu T_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu \end{aligned} \quad (2.10)$$

che stabilisce la legge di trasformazione tra tensori perchè essi siano invarianti.

2.4.3 L'operatore \square di D'Alembert

Introduciamo i noti operatori vettoriali.

Definizione 7 Si definisce quadrigradiente di uno scalare Φ la quantità vettoriale controvariante $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$ o la quantità vettoriale covariante $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$.

Nota: il quadrigradiente di un quadrivettore è un tensore di rango 2 subito costruito.

Definizione 8 Si definisce quadridivergenza di un quadrivettore A^μ lo scalare $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\mu$.

Definizione 9 Si definisce quadrirotore di un quadrivettore A^μ il tensore $T^\mu_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu$.

Consideriamo il prodotto scalare del quadrigradiente scalare covariante e controvariante:

$$-\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = \square \quad (2.11)$$

ovvero l'operatore di D'Alembert, che dunque è un invariante in S_M .

2.5 Cinematica relativistica

Il nostro scopo non è quello di ricavare le comuni leggi della cinematica, bensì quello di definire gli oggetti che la costruiscono interamente: i quadrivettori, le quadrivelocità, le quadriaccelerazioni.

2.5.1 Quadrivelocità

Abbiamo bisogno di definire un invariante, di conseguenza non possiamo permetterci di utilizzare la derivata del quadrivettore rispetto al tempo ordinario, poichè sappiamo che dt non è invariante.

Tuttavia lo è $d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$, per cui avremo:

$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \gamma \frac{d}{dt}(c dt, d\vec{r}) \equiv (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (2.12)$$

In questo modo abbiamo stabilito una definizione in forma covariante delle quadrivelocità.

Possiamo inoltre aggiungere che:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv c \frac{dx^\mu}{ds} \quad (2.13)$$

Posto $\frac{dx^\mu}{ds} \equiv u^\mu$ otteniamo in definitiva:

$$v^\mu \equiv c u^\mu \quad (2.14)$$

Si noti che risulta subito $v_\mu v^\mu = c^2$.

2.5.2 Quadriaccelerazione

Il modo di procedere è del tutto identico a quello adottato per ricavare l'espressione della quadrivelocità. Partendo dagli invarianti:

$$a^\mu \equiv \frac{dv^\mu}{d\tau} \equiv \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \equiv \gamma \frac{d}{dt}(\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (2.15)$$

Premettiamo che

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{c^2} \gamma^3 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.16)$$

Dunque, tornando alla (2.15):

$$a^\mu \equiv \left[c\gamma \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \right] \quad (2.17)$$

Volendo saltare i passaggi algebrici intermedi, possiamo concludere che:

$$a^\mu \equiv \left[\frac{c}{c^2 - v^2} \gamma^2 \vec{v} \cdot \vec{a}, \frac{1}{c^2 - v^2} \gamma^2 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right] \quad (2.18)$$

che conclude la trattazione delle entità cinematiche relativistiche. Le leggi della cinematica dei quadrivettori saranno presto trovate a partire da queste definizioni e da integrazioni successive, proprio come l'analogo classico.

2.6 Dinamica relativistica

Classicamente la dinamica si costruisce a partire dai 3 principi di Newton. Noi potremmo generalizzare allo spazio S_M tali principi e definire per esempio la forza di Minkowsky come $f^\mu = m_0 a^\mu$ in forma invariante, con m_0 massa a riposo solidale a un sistema in quiete.

Tuttavia così facendo potremmo non derivare alcune importanti conseguenze e proprietà, in quanto non faremmo una naturale estensione della teoria classica.

Invece possiamo partire dalla più generale (valida anche in relatività) $f^\mu = \frac{dp^\mu}{dt}$, dove il problema sta nel definire il quadrivettore p^μ , più semplicemente il *quadrimpulso*.

Per fare ciò dobbiamo prima accertarci quali siano le effettive componenti di p^μ , in quanto potremmo partire direttamente definendolo come $p^\mu = m_0 v^\mu$. In effetti dimostreremo che questa è una buona definizione.

2.6.1 Richiami di meccanica lagrangiana e hamiltoniana

Ricordiamo molto brevemente al lettore, che il moto di un qualunque sistema meccanico può essere descritto da una funzione delle sue coordinate spaziali e delle sue velocità. Se indichiamo con $q = (q_1, \dots, q_n)$ e $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ rispettivamente le coordinate e le velocità generalizzate di un sistema a n gradi di libertà, possiamo costruire una funzione, detta *Lagrangiana*, che rende minima l'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.19)$$

per sistemi a vincoli fissi. A partire da questa e dalla variazione² δS di S si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange che reggono il moto del sistema

²Questo procedimento è comunemente chiamato *metodo variazionale*.

in analisi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.20)$$

Altrimenti, è possibile sfruttare un'altra funzione del moto, l'*Hamiltoniana*, ottenibile a partire dalla lagrangiana:

$$H\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, q, t\right) = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (2.21)$$

da cui, posto $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, si ottengono le equazioni del moto di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(p, q, t) = 0 \quad (2.22)$$

2.6.2 Lagrangiana relativistica

Il nostro scopo è quello di descrivere relativisticamente il moto di una particella libera, per cui è $L = \frac{1}{2}m_0v^2$. Ricordando $dt = \gamma d\tau$, per la variazione d'azione avremo

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \gamma L d\tau \quad (2.23)$$

Poichè supponiamo l'azione invariante e $d\tau$ è invariante, lo sarà anche $\gamma L = \alpha$. Ma allora, sviluppando in serie di Taylor in β^2 , la lagrangiana non relativistica sarà $L^{nr} = \frac{\alpha}{\gamma}$:

$$L^{nr} = \frac{\alpha}{\gamma} = \alpha \sqrt{1 - \beta^2} \simeq \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (2.24)$$

Poichè la lagrangiana del moto non cambia se gli si aggiunge una derivata totale rispetto al tempo, avremo, scelta $f = \alpha t$:

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{df}{dt} \implies \alpha = -m_0 c^2 \quad (2.25)$$

da cui $L^r = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

2.6.3 Il quadrimpulso

A questo punto siamo in grado di trovare impulso (momento cinetico coniugato) ed energia. Infatti

$$\vec{p} = \frac{\partial L^r}{\partial \vec{v}} = \gamma m_0 \vec{v} \quad (2.26)$$

e

$$E = \vec{v} \cdot \frac{\partial L^r}{\partial \vec{v}} - L^r = \gamma m_0 c^2 \quad (2.27)$$

In particolare osserviamo che l'energia relativistica è maggiore di quella classica, poichè prevede un termine aggiuntivo $m_0 c^2$ (energia di quiete) che nella teoria classica era una costante additiva sempre posta uguale a zero.

Notiamo fondamentalmente che:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma m_0 \frac{d\vec{r}}{\frac{1}{c} ds} = \frac{m_0 c}{ds} d\vec{r} \quad (2.28)$$

e

$$E = \gamma m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 \frac{dt}{dt} = \gamma m_0 c^2 \frac{dt}{\frac{1}{c} ds} = \frac{m_0 c}{ds} c^2 dt \implies \frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{ds} c dt \quad (2.29)$$

Si nota che entrambe le quantità hanno un fattore invariante in comune $\frac{m_0 c}{ds}$ moltiplicato per le componenti del quadrivettore:

$$p^\mu \equiv \frac{m_0 c}{ds} dx^\mu \equiv m_0 v^\mu \quad (2.30)$$

Per quanto riguarda le componenti:

$$p^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \equiv (m_0 \gamma c, m_0 \gamma \vec{v}) \quad (2.31)$$

che viene comunemente chiamato *quadrimpulso* o *quadrivettore energia-impulso*.

Da notare che il prodotto scalare del quadrimpulso definisce un nuovo legame tra energia e impulso:

$$p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 \quad (2.32)$$

e anche

$$p_\mu p^\mu = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = m_0^2 c^2 \quad (2.33)$$

da cui

$$\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2 \implies |\vec{p}_0|^2 - |\vec{p}|^2 = m_0^2 c^2 \quad (2.34)$$

detta *relazione di Einstein*, che va a sostituire la classica $E = \frac{p^2}{2m}$.

Concludiamo stabilendo le leggi di trasformazione del quadrivettore in forma estesa e controvariante:

$$\begin{cases} p'_x = \gamma(p_x - \beta \frac{E}{c}) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ \frac{E'}{c} = \gamma(\frac{E}{c} - \beta p_x) \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\begin{cases} p'^0 = \gamma(p^0 - \beta p^1) \\ p'^1 = \gamma(p^1 - \beta p^0) \\ p'^2 = p^2 \\ p'^3 = p^3 \end{cases} \quad (2.36)$$

2.6.4 Equazioni del moto

Tornando all'azione:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \alpha d\tau = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha}{c} ds \quad (2.37)$$

Ricordando che $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$ ed eseguendo la variazione:

$$\begin{aligned} \delta S &= -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta dx_\mu dx^\mu}{2\sqrt{dx_\mu dx^\mu}} + \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{2\sqrt{dx_\mu dx^\mu}} \right) = \\ &= -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_\mu d(\delta x^\mu)}{ds} = -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} u_\mu d(\delta x^\mu) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Poichè $u_\mu d(\delta x^\mu) = d(u_\mu \delta x^\mu) - du_\mu \delta x^\mu$, e poichè l'integrale del primo termine si annulla (per via dell'imposizione degli estremi fissi $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$), si avrà:

$$\delta S = m_0 c \int_{t_1}^{t_2} du_\mu \delta x^\mu = m_0 c \int_{t_1}^{t_2} \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds = 0 \quad (2.39)$$

Questa deve essere valida per qualunque δx^μ e dunque, ricordando che $v_\mu \equiv cu_\mu$ e quindi $m_0 cu_\mu = p_\mu$, si avrà

$$\delta S = m_0 c \frac{du_\mu}{ds} \equiv \frac{dp_\mu}{ds} \equiv 0 \quad (2.40)$$

ossia le equazioni del moto manifestamente covarianti.

2.6.5 Conclusioni

Il metodo utilizzato è rigoroso. Avremmo comunque potuto definire fin da subito il quadrimpulso come estensione in S_M dell'impulso classico e ottenere, utilizzando l'espressione di $\frac{d\gamma}{dt}$, p_0 e \vec{p} , gli stessi risultati, ma non potevamo essere certi che la nostra definizione di base fosse corretta. In questo modo la abbiamo ricavata rigorosamente.

2.7 Applicazioni

2.7.1 Energia di quiete

Come anticipato in precedenza, la relatività ristretta ha introdotto una costante energetica additiva considerata nulla nella teoria classica. Essa è $E = p_0c = m_0c^2$ nel riferimento in cui la particella, per esempio, è in quiete e $\vec{p} = 0$.

Di conseguenza, l'energia cinetica risulta essere

$$T = E - m_0c^2 \quad (2.41)$$

2.7.2 Mare di Dirac

In meccanica classica, l'energia varia con continuità, risulta dunque impossibile, per esempio, superare un gap energetico qualunque.

Dalla relazione di Einstein si può dedurre

$$p_0 = \pm \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_0^2c^2} \quad (2.42)$$

ossia una geometria simile all'iperbole degli eventi ma in cui gli assi sono le componenti del quadrimpulso \vec{p} e p_0 .

Il gap tra i due rami di iperbole è $\Delta p_0 = m_0c - (-m_0c) = 2m_0c$ e la conseguente energia per superarlo sarà $\Delta E = \Delta p_0c = 2m_0c^2$.

In meccanica quantistica, poichè l'energia è quantizzata in pacchetti di $h\nu$ (con h la costante di Planck), si avrà che una radiazione e.m. tale che $h\nu < 2m_0c^2$ non sarà assorbita, al contrario una di $h\nu \geq 2m_0c^2$ lo sarà³.

A partire da queste e da altre equazioni della relatività ristretta, Dirac si accorse che si era imposto del tutto arbitrariamente di accettare soltanto le soluzioni che contenessero il valore positivo dell'energia: in effetti tale scelta arbitraria era dettata dalla quotidianità, in cui non si è mai osservato un corpo in moto raffreddarsi piuttosto che scaldarsi.

³Il lettore avrà notato l'analogia di queste condizioni con quella quantistica di indeterminazione di Heisenberg $\Delta t \Delta E \geq h$.

Sulla scia di Weyl, che già qualche tempo prima aveva proposto di valutare energie negative ma non aveva saputo darne una spiegazione, Dirac costruì un 'mare' ipotetico (quello di Dirac appunto), riempito in maniera compatta da tutti gli stati quantistici possibili delle particelle ad energia negativa.

Per il principio di esclusione di Pauli e per la natura della nostra materia solida non possiamo percepire questo 'mare'.

Supponiamo tuttavia che un quanto d'energia, per esempio un fotone, riesca ad urtare uno tra tutti gli elettroni del mare e lo cacci da esso dandogli l'energia necessaria a saltare il gap di cui prima, $2m_0c^2$. A questo punto l'energia dell'elettrone sarà m_0c^2 , positiva, e sarà una particella normalissima nella realtà che conosciamo.

Tuttavia esso ha lasciato una 'lacuna' nel mare dietro di sé: questo distrugge la compattezza dell'ambiente e si comporta esattamente come un elettrone ma di carica positiva, un positrone (come verrà chiamato successivamente). Questo positrone si materializza nella nostra realtà con energia positiva e finirà la sua esistenza non appena incontrerà un elettrone pronto a riempire la lacuna, scomparendo entrambi in un lampo di luce (sciame di fotoni) di energia $2m_0c^2$.

Questa interazione si potrebbe prolungare a patto di mantenere la particella e la sua antiparticella ad una distanza critica: non solo per l'elettrone ma per ogni altra particella elementare accade questo fenomeno, in cui si creano e distruggono coppie; in realtà dunque il vuoto non è 'vuoto' come lo intendiamo nella vita comune, ma è 'vuoto' quantisticamente.

Nel caso dell'elettrone, si realizza la reazione $\gamma \longrightarrow e^+ + e^-$ solo ad un energia del fotone superiore a $1.02MeV$.

2.7.3 Decadimento

Sia data una particella instabile di massa M in quiete e poniamoci nel suo s.r.i. attendendo che decada spontaneamente nelle particelle a e b . Le condizioni necessarie di conservazione sono:

$$\begin{cases} Mc^2 = E_a + E_b \geq (m_a + m_b)c^2 \\ \vec{p}_a + \vec{p}_b = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Poichè $|\vec{p}_a|c = \sqrt{E_a^2 - m_a^2c^4}$ e $|\vec{p}_b|c = \sqrt{E_b^2 - m_b^2c^4}$, si ha

$$\begin{aligned} E_a^2 - m_a^2c^4 = E_b^2 - m_b^2c^4 = (Mc^2 - E_a)^2 - m_b^2c^4 &\implies \\ \begin{cases} E_a = \frac{M^2 + m_a^2 - m_b^2}{2M}c^2 \\ E_b = \frac{M^2 + m_b^2 - m_a^2}{2M}c^2 \end{cases} & \quad (2.44) \end{aligned}$$

2.7.4 Urti di particelle

Date due particelle a e b , dal loro urto in generale si ottengono altre particelle, a' e b' , che devono soddisfare a precise leggi di conservazione. Il processo d'urto è sinteticamente indicato con $a + b \longrightarrow a' + b'$.

La descrizione dell'evento urto coinvolge dunque 4 quadrimpulsi: tramite essi si possono costruire 16 scalari $p_i \cdot p_j$, di cui 10 diversi tra loro (quello per $i \leq j$).

Quelli diagonali sono fissati da relazioni energia-impulso:

$$p_i \cdot p_j = m_i^2 c^2 \quad (2.45)$$

e altri 4 sono fissati dalla conservazione

$$p_a + p_b = p_{a'} + p_{b'} \quad (2.46)$$

Dunque sono necessari 2 scalari indipendenti per descrivere l'urto, ma solo nell'ipotesi di trascurare altri eventuali gradi di libertà dovuti ad altri effetti come per esempio la polarizzazione.

In processi di questo tipo vengono adoperate frequentemente le variabili di Mandelstem: sistemi

$$\begin{cases} s = (p_a + p_b)^2 = (p_{a'} + p_{b'})^2 \\ t = (p_{a'} - p_a)^2 = (p_{b'} - p_b)^2 \\ u = (p_{a'} - p_b)^2 = (p_{b'} - p_a)^2 \end{cases} \quad (2.47)$$

Sviluppando i quadrati e tenendo conto che i doppi prodotti sono prodotti scalari, si nota facilmente come tutti i $p_i \cdot p_j$ si possono esprimere in funzione delle sole variabili di Mandelstem e delle masse delle particelle coinvolte.

Le 3 variabili non sono comunque indipendenti e di fatto sono legate dall'equazione

$$s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_{a'}^2 + m_{b'}^2)c^2 \quad (2.48)$$

pertanto due sole di queste sono indipendenti.

Poichè stiamo trattando il problema relativisticamente, non ha più senso parlare di particella ferma (bersaglio) o in moto, perchè tutto dipende dal sistema di riferimento scelto.

In particolare, nel centro di massa di 2 particelle di uguale massa accade che:

$$\begin{cases} p_a = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \\ p_b = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \\ p_{a'} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}' \right) \\ p_{b'} = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}' \right) \end{cases} \quad (2.49)$$

e quindi, dalla definizione delle variabili di Mandelstem, si ottiene:

$$\begin{cases} s = (p_a + p_b)^2 = 4\frac{E^2}{c^2} \\ t = (p_{a'} - p_a)^2 = -(\vec{p}' - \vec{p})^2 = -2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta) = -4|\vec{p}|^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) \\ u = (p_{b'} - p_a)^2 = -(-\vec{p}' - \vec{p})^2 = -2|\vec{p}|^2(1 + \cos\theta) = -4|\vec{p}|^2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) \end{cases} \quad (2.50)$$

da cui si osserva

$$s + t + u = 4\left(\frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2\right) = 4m^2c^2 \quad (2.51)$$

2.8 Equivalenza massa-energia

Supponiamo di avere un tubo di lunghezza l e massa M , posto in quiete nel vuoto. Sia posta internamente sull'estremità di sinistra del tubo una sorgente (di massa nulla) di radiazione e.m.

Non appena la sorgente invia un segnale di energia E , il tubo riceverà un impulso, per quanto piccolo, $p = \frac{E}{c}$. Perchè si conservi l'impulso per questo sistema isolato, il tubo deve rinculare verso sinistra di un tratto $x = vt$, indicando con t il tempo che impiega il segnale a percorrere il rimanente tratto $l - x$ e con v la velocità di rinculo. Dunque:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{l - x}{c} \implies \frac{v}{c} = \frac{x}{l - x} \quad (2.52)$$

Poichè il baricentro del sistema è in quiete prima del moto e il sistema è isolato, esso sarà in quiete lungo tutto il tempo t : ammettendo che la radiazione trasporta una massa m , si avrà $ml = Mx$, ossia $m = \frac{M}{l}x$.

Per la conservazione dell'impulso si ha:

$$(M - m)v = \frac{E}{c} \implies \frac{v}{c} = \frac{\frac{E}{c^2}}{M - m} = \frac{x}{l - x} \implies x = \frac{l\frac{E}{c^2}}{M - m + \frac{E}{c^2}} \quad (2.53)$$

ma $m = \frac{M}{l}x$:

$$m = \frac{M}{l} \frac{l\frac{E}{c^2}}{M - m + \frac{E}{c^2}} \implies m^2 - \left(\frac{E}{c^2} + M\right)m + M\frac{E}{c^2} = 0 \quad (2.54)$$

da cui le due soluzioni $m = M$, come era da aspettarsi, e $m = \frac{E}{c^2}$, che stabilisce una nuova equivalenza, quella tra massa ed energia, che storicamente è dunque la causa della famosa $E = mc^2$.

Capitolo 3

Relatività generale

Premettiamo da subito che questo capitolo non pretende di approfondire i numerosi sviluppi della relatività generale, ma intende presentarla come naturale estensione della relatività ristretta.

3.1 Il paradosso dei gemelli

Il paradosso dei gemelli è forse una delle più affascinanti conseguenze della meccanica relativistica.

Due gemelli si trovano nell'origine di un sistema di assi coordinati Oxx' all'istante $t = t' = 0$, uno sulla Terra, che chiameremo T , e l'altro su un razzo, che chiameremo R , che si muove rispetto a T con velocità u .

Se T misura gli intervalli tra i battiti cardiaci di R , trova che sono superiori a quelli che R stesso misura con i suoi strumenti, deducendone che R vive *più lentamente* di lui. D'altro canto, tali intervalli sono legati dalla relazione (1.49) dimostrata in precedenza.

Di conseguenza la conclusione di T sarà che R vivrà molto più a lungo di lui, di un periodo che è intimamente connesso alla velocità alla quale sta viaggiando R stesso.

Tuttavia l'esperimento viene operato anche da R , che misura intervalli più lunghi tra i battiti di T di quanto in realtà T stesso misuri, arrivando alle stesse conclusioni di T fatte in precedenza.

Se è vero che i due sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti, e se, come abbiamo dimostrato, il rapporto tra gli intervalli di tempo misurati dipende solo dal quadrato della velocità e non dal suo segno, allora per quanto opposte, le due conclusioni sono entrambe corrette.

Se indichiamo con il termine *soluzione*, una conclusione che mette T e R

d'accordo, il paradosso non ammette soluzione se R continua il suo viaggio per sempre senza più tornare indietro.

Al contrario, la verifica delle osservazioni proposte da entrambi, sarà presto fatta non appena R torni da T . Tentiamo dunque un approccio a questa seconda ipotesi.

Come ben sappiamo, R partendo dalla quiete, non può raggiungere istantaneamente la velocità con cui proseguirà in tutto il suo viaggio u , ma dovrà subire un'accelerazione. Analogamente, al momento di fermarsi nei pressi della meta, non raggiungerà subito la quiete e dovrà decelerare. La situazione resta identica per le manovre di ritorno a velocità $-u$.

Assumiamo per un attimo che i tempi di tali accelerazioni e decelerazioni siano trascurabili se confrontati con la durata del viaggio, e che $u \simeq c$.

Naturalmente, entrambi saranno d'accordo che il percorso sarà visto contratto da R : tuttavia, R misurerà un tempo minore allora per percorrerlo, e due volte quel tempo restituisce l'intera distanza percorsa. Ma per T nulla sarà cambiato e dal suo punto di vista, il suo gemello R avrà percorso il tragitto in molto più tempo di quanto in realtà R abbia misurato, dunque R vive realmente di più.

Per renderci conto di ciò, immaginiamo che entrambi i fratelli siano forniti di sofisticate apparecchiature per la misura del tempo, *assolutamente identiche*. Allora R parte, raggiunge in un tempo trascurabile la velocità $u \simeq c$, arriva dall'altra parte della galassia, decelera, frena, e riparte quasi immediatamente a velocità $-u$ fino a tornare al punto da cui era partito.

Durante questo intervallo di tempo, T gli manda dei segnali radar ad intervalli identici pari a t_T , che R riceve ad intervalli t'_T e con un riflettore li reinvia a T . Contemporaneamente lancia segnali radar ad intervalli t''_R ricevuti da T ad intervalli t''_R .

Se trascuriamo i tempi il cui il sistema in moto non è inerziale, T invia in totale

$$n = 2 \frac{\Delta t}{t_T} = 2 \frac{l}{ut_T} \quad (3.1)$$

segnali radar a R , di cui metà dalla partenza di R al suo primo arresto e l'altra metà dal momento del ritorno.

Ma R ne riceve un numero $n_1 < \frac{n}{2}$ fino al suo primo arresto, poiché alcuni di questi segnali non hanno avuto il tempo di raggiungerlo prima che egli invertisse rotta, cosa che faranno al momento del ritorno. Dunque, se $\frac{l}{c}$ è il tempo che impiega la luce a percorrere da un estremo all'altro, si ha:

$$n_1 = \frac{n}{2} - \frac{l}{ct_T} \quad (3.2)$$

L'ultimo segnalericevibile dal razzo non può essere lanciato dopo l'istante $\Delta t - \frac{l}{c}$, poichè è necessario un tempo pari a $\frac{l}{c}$ perchè la luce arrivi al razzo prima della sua inversione.

Questi primi segnali ricevuti da R e misurati con il suo orologio, arrivano ad intervalli di tempo costanti di

$$t'_{1T} = k(u)t_T$$

dove

$$k(u) = k = \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}}$$

I segnali restanti, al momento del ritorno sono in totale

$$n_2 = n - n_1 = \frac{n}{2} + \frac{l}{ct_T} \quad (3.3)$$

e sono ricevuti ad intervalli costanti

$$t'_{2T} = k(-u)t_T$$

dove

$$k(u) = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}}$$

La durata totale del viaggio, misurata da R , usando i segnali radar che gli provengono da T è data, usando le (3.1), (3.2) e (3.3), da

$$\begin{aligned} 2\Delta t' &= (kn_1 + \frac{1}{k}n_2)t_T = [(k + \frac{1}{k})\frac{n}{2} - (k - \frac{1}{k})\frac{l}{ct_T}]t_T = \\ &= n\gamma t_T - 2\gamma\frac{ul}{c^2} = 2\gamma(\Delta t - \frac{ul}{c^2}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ricavando l dalla (3.1), si ha

$$\Delta t' = \gamma\Delta t\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma}\Delta t < \Delta t \quad (3.5)$$

R , utilizzando i segnali provenienti da T ammette che la durata del suo viaggio, da lui misurata come $2\Delta t'$, è realmente minore di quella misurata da T con il suo orologio. Ma non contenti di ciò, i due utilizzano una controprova, con i segnali lanciati da R .

Dal momento della partenza fino al suo rientro, R invia a T

$$n = 2 \frac{\Delta t'}{t'_R} = 2 \frac{l'}{ut'_R} \quad (3.6)$$

segnali, di cui metà dalla partenza al suo primo arresto a metà percorso, indicando con l' la distanza misurata da R . Ma T ne riceve $n_1 < \frac{n}{2}$ nel tempo Δt dalla partenza fino al primo arresto di R , e gli altri dopo l'inversione di rotta di R . Ma adesso, oltre gli n_1 , tutti gli $\frac{n}{2}$ segnali inviati da R prima del suo arresto, arrivano a T ad intervalli di tempo costanti pari a

$$t''_R = k(u)t'_R = kt'_R$$

Del resto, solo dopo l'inversione i segnali inviati dal razzo cambieranno frequenza, perchè stavolta il cambio della velocità è della sorgente. Stavolta è la sorgente a cambiare il moto: T , non cambia, e quindi solo quando i primi segnali emessi dalla 'nuova' sorgente gli arriveranno, potrà registrare il cambiamento del moto di quest'ultima rispetto alla 'vecchia'.

I nuovi $\frac{n}{2}$ segnali saranno ricevuti da T ad intervalli costanti pari a

$$t''_R = k(-u)t'_R = \frac{1}{k}t'_R$$

La questione fondamentale sta proprio nella non equivalenza tra sorgente e osservatore: quando la sorgente è a terra essa non cambia, e quindi è R a registrare i cambiamenti che intervengono immediatamente al momento della sua inversione di moto, con la conseguenza che i segnali di frequenze diverse sono in numero diseguale; quando la sorgente è il razzo è R che cambia e T può registrare i cambiamenti, ma non immediatamente, data la limitatezza della velocità della luce; solo quando il primo segnale emesso dopo l'inversione arriva a T essa si accorge del cambiamento ed è per questo che le conclusioni di entrambi ora coincidono.

La durata del viaggio misurata da T , usando i segnali che gli provengono da R , e tenendo conto della (3.6), è

$$2\Delta t = (k + \frac{1}{k})n \frac{t'_R}{2} = 2\gamma\Delta t' \quad (3.7)$$

da cui

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma}\Delta t < \Delta t \quad (3.8)$$

in accordo con la (3.5), cioè il tempo misurato da T è maggiore di quello misurato da R , che usando segnali indipendenti sono arrivati ad una conclusione coincidente. Dunque, in un sistema di riferimento in moto non inerziale, il tempo scorre più lentamente rispetto a quello misurato nel sistema di riferimento inerziale rispetto a cui l'altro si muove¹.

3.2 I principi della relatività generale

La relatività ristretta aveva ben descritto il comportamento meccanico in circostanze speciali, quali la presenza di un campo e.m., tuttavia tutta la teoria della gravitazione ne era rimasta fuori.

Di fatto la ristretta non teneva affatto conto di sistemi di riferimento non inerziali (s.r.n.i), e dunque i sistemi accelerati non erano descritti.

La teoria newtoniana della gravitazione, pur essendo soltanto imprecisa presenta una pecca di natura concettuale: la gravitazione come azione a distanza e non come azione di campo. Questo implicava la trasmissione di segnali a velocità infinita, contro le evidenze sperimentali della prima metà del '900.

Inoltre non era ancora stabilito il motivo, accidentale o profondo, dell'uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale.

3.2.1 Il principio di equivalenza

Fu principalmente per questo motivo, che nel 1911, Einstein introdusse il noto *principio di equivalenza*: consideriamo un s.r.i. S in cui esiste un campo gravitazionale uniforme e un sistema S' accelerato uniformemente con accelerazione g rispetto a S , in cui non c'è campo gravitazionale; allora i due riferimenti sono fisicamente equivalenti.

Quali sono le implicazioni di questo principio?

Consideriamo un ascensore (sistema S') in caduta libera, e poniamoci a terra come osservatori solidali ad un s.r.i. S in quiete rispetto a S' : chi si trova sull'ascensore accelerato con accelerazione uguale in modulo a g , non sentirà l'effetto del suo peso, ovvero una bilancia sull'ascensore misurerebbe peso zero per chi si trova in S' .

Questo significa che chi si trova dentro S' pensa di essere in un s.r.i., in quanto non vi sono accelerazioni (in quanto 'non sente' più il campo gravitazionale).

¹Questo argomento ha tratto spunto dalle lezioni del professore R. Potenza, tenute all'Università di Catania nel dipartimento di Fisica e Astronomia nel 2003.

Allo stesso modo, consideriamo un ascensore abbastanza lontano da qualunque campo gravitazionale, e accelerato con $a = -g$: chi si trova sull'ascensore e in quiete misura peso zero, adesso misurerà il suo peso effettivo (cioè quello che avrebbe sulla Terra).

I due ascensori rappresentano la sintesi del principio di equivalenza: in presenza di campo gravitazionale, un sistema opportunamente accelerato diventa inerziale; in assenza, risente di una azione di campo identica a quella che risentirebbe in quiete in presenza dello stesso campo.

Nota importante: un vero campo gravitazionale si annulla all'infinito, dunque realmente non esiste nessun riferimento che non risenta per sempre di un tale campo. Quanto detto, in pratica vale solo localmente, in una regione abbastanza limitata.

3.3 Tensore metrico e gravità

In ogni s.r.i. si ha

$$ds^2 \equiv dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu \quad (3.9)$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico definito in precedenza.

Consideriamo adesso un riferimento non inerziale come un sistema in rotazione uniforme con velocità angolare w intorno all'asse z . Le coordinate dei punti saranno sistemi

$$\begin{cases} x = x' \cos wt' - y' \sin wt' \\ y = x' \sin wt' + y' \cos wt' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (3.10)$$

Quindi

$$ds^2 = [c^2 - w^2(x'^2 + y'^2)]dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2wy'dx'dt' - 2wx'dy'dt' \quad (3.11)$$

Differenziando i termini del sistema e andando a sostituire nell'equazione precedente:

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 + w^2(x'^2 + y'^2)dt'^2 + \Theta \quad (3.12)$$

dove abbiamo indicato con Θ le somme relative ai doppi prodotti.

Ovviamente anche in questo caso possiamo riassumere l'espressione dell'intervallo quadro con un tensore metrico nella forma

$$ds^2 \equiv dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu \quad (3.13)$$

tuttavia questa metrica non è uguale a quella di un *s.r.i.* come è ben evidente dalla sua espressione: essa adesso è funzione delle coordinate spazio-temporali dell'evento.

Per quanto detto in precedenza riguardo l'eliminazione locale di un campo gravitazionale passando ad un *s.r.n.i.*, notiamo che esso può essere descritto da un cambiamento della metrica dello spazio-tempo, quindi delle componenti del tensore metrico: ma allora la geometria di tale spazio è determinato da fenomeni fisici quali per esempio la distribuzione delle masse in gioco.

Questo implica inequivocabilmente che lo spazio-tempo è curvo e la sua geometria non può essere euclidea.

Dunque la gravità risulta essere non la causa della curvatura dello spazio, ma la curvatura stessa.

3.3.1 Determinazione della metrica

Il problema della relatività generale è quello di determinare la metrica del tessuto spazio-temporale.

A questo proposito ricordiamo la proprietà estremale utilizzata nel metodo variazionale per ricavare le equazioni del moto con la lagrangiana relativistica:

$$\delta \int_{E_1}^{E_2} ds = 0 \quad (3.14)$$

per ogni coppia di eventi che individuano un intervallo di genere temporale. Questa proprietà ci dice che un punto materiale libero si muove lungo una *geodetica*².

Un corpo di massa m soggetto ad un campo gravitazionale U è descritto dalla variazione

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + U \right) dt = 0 \quad (3.15)$$

²Il minimo intervallo in S_M : per un raggio di luce, la geodetica ha lunghezza nulla.

dove $m\vec{a} = \nabla(mU)$. Inoltre possiamo senza dubbio scrivere che

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt = \delta t_1 - \delta t_2 = 0 \quad (3.16)$$

da cui, moltiplicando per costanti:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} c dt = 0 \quad (3.17)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + U \right) dt = 0 \quad (3.18)$$

e sottraendo membro a membro:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} c \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + U \right) \right] dt = 0 \quad (3.19)$$

Sia $\Xi = \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + U \right)$: sviluppiamo in serie al primo ordine in $\Xi = 0$ la funzione $\sqrt{1 - 2\Xi}$:

$$\sqrt{1 - 2\Xi} \simeq 1 + \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\Xi}} (-2) \right]_{\Xi=0} (\Xi) = 1 - \Xi = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + U \right) \quad (3.20)$$

Se $c^2 \gg \dot{r}^2 + 2U$, l'approssimazione della serie è soddisfacente, per cui, tornando alla variazione siamo autorizzati a scrivere

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} c \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 + U \right) \right] dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} c \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{r}^2 + 2U)} dt = 0 \quad (3.21)$$

Portando sotto radice il differenziale dt e svolgendo semplici passaggi algebrici si ottiene l'espressione

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = 0 \quad (3.22)$$

che a sua volta può essere considerata come l'equazione che definisce una nuova geodetica³ $\delta \int ds = 0$.

Questa nuova geodetica⁴ si riferisce ad uno spazio tempo di tensore metrico nuovo (di cui noi non approfondiremo le componenti) $g_{\alpha\beta}$ in generale funzione delle coordinate e in cui $g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2}$.

³Si ricorda che in assenza di U la geodetica differiva dalla (3.22) semplicemente per il coefficiente della coordinata temporale: $\delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = 0$.

⁴Per un segnale luminoso $ds = 0$, per cui $v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = c \sqrt{1 - \frac{2U}{c^2}}$.

3.4 Prove sperimentali

3.4.1 Amplificazione dell'effetto Doppler

Consideriamo un atomo A che emette un fotone di frequenza ν che viene poi assorbito da un rivelatore R , in presenza di un campo gravitazionale uniforme \vec{g} diretto verso il basso. Sia S il s.r.i. in cui A e R sono in quiete ad una distanza d .

Per il principio di equivalenza, possiamo considerare un s.r.n.i. S' con accelerazione $\vec{a} = -\vec{g}$ e il tempo t di volo del fotone da A a R ; dalla cinematica: $gt = g\frac{d}{c}$. In S' (indipendentemente dal sistema di riferimento), la velocità di una radiazione e.m. non varia, tuttavia possono variare la frequenza e la lunghezza, pur restando il loro prodotto costante.

Questo è il caso, avendo variazione di frequenza (e dunque di lunghezza d'onda); quindi si ha effetto Doppler:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{c + g\frac{d}{c}}{c - g\frac{d}{c}}} \simeq 1 + g\frac{d}{c^2} \quad (3.23)$$

Andiamo ad analizzare quello che succede invece in S . Essendo A e R in quiete relativamente, non ci sarà effetto Doppler: tuttavia adesso è presente un campo gravitazionale.

Attribuendo al fotone una massa gravitazionale uguale a quella inerziale $\frac{E}{c^2}$, nella caduta da un'altezza d esso assumerà energia $\frac{E}{c^2}gd$ e quindi un'energia totale

$$E' = E + \frac{E}{c^2}gd \quad (3.24)$$

da cui, ricordando $E = h\nu$:

$$h\nu' = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gd \implies \frac{\nu'}{\nu} = 1 + g\frac{d}{c^2} \quad (3.25)$$

che è lo stesso risultato ricavato in (3.23).

Pur essendo estremamente piccolo, questo effetto aggiuntivo ('amplificante') a quello Doppler fu misurato da Pound e Rebka nel 1960: con $h = 22.5m$ ottennero $\frac{\Delta\nu'}{\nu} \simeq 2.5 \cdot 10^{-15}$ in buon accordo con la teoria⁵.

Successivamente l'esperimento ottenne con Pound e Snider risultati migliori:

$$\frac{(\Delta\nu)_{exp}}{(\Delta\nu)_{th}} = 0.9990 \pm 0.0076.$$

⁵Si misurò $\frac{(\Delta\nu)_{exp}}{(\Delta\nu)_{th}} = 1.05 \pm 0.10$

Qualcosa di simile avviene durante l'osservazione di una stella dalla Terra. In questo caso non possiamo considerare un campo gravitazionale uniforme, ma sappiamo che $\Delta\nu$ dipende dai potenziali dei punti di emissione e osservazione:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Phi_e - \Phi_o}{c^2} \quad (3.26)$$

Se il punto di emissione è il sole o una stella si ha che $\frac{\Delta\nu}{\nu} < 0$, ossia uno spostamento gravitazionale verso il rosso in aggiunta a quello Doppler ma molto più piccolo.

3.4.2 Deflessione della luce

In prossimità di una massa, sappiamo che lo spazio-tempo si curva e che la luce si propaga in esso secondo una geodetica che non è una linea retta.

Questo significa che in teoria, la luce di una stella lontana posta dietro il sole dal punto in cui noi la osserviamo, giunge da una direzione diversa da quella effettiva: ovvero la posizione della stella ci appare spostata da quella effettiva di un certo angolo.

Questo effetto era già stato previsto in relatività ristretta, ma l'origine di tale previsione è di natura diversa e quantitativamente inferiore a quella della relatività generale, rispettivamente $\Delta\Phi \simeq 0.88''$ e $\Delta\Phi \simeq 1.75''$.

Il fenomeno è stato dimostrato e verificato in maniera eccellente da una spedizione nel 1919 durante un'eclissi di sole. Ripetuto nel 1922, è stato ulteriormente verificato.

3.4.3 Perielio di Mercurio

Questo è il pianeta più vicino al sole e in effetti, essendo molto più pesanti le differenze tra la gravitazione newtoniana e quella einsteiniana, si osservava da sempre e senza apparente spiegazione uno spostamento del suo perielio.

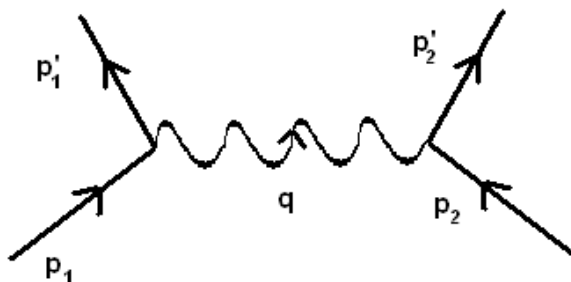
In assenza degli altri pianeti, per Newton l'orbita sarebbe perfettamente ellittica senza spostamento del perielio. Per Einstein invece si sarebbe dovuto osservare, in tale ipotesi, uno spostamento di $42''$ per secolo del perielio.

Le osservazioni fatte stabiliscono uno spostamento di $574''$ per secolo: di questi $532''$ sono dovuti all'effetto degli altri pianeti, mentre i restanti $42''$, senza una plausibile spiegazione prima della relatività generale, sono spiegati dalla gravitazione di Einstein.

Capitolo 4

Cenni di elettrodinamica relativistica

Abbiamo mostrato che, almeno per quanto riguarda l'elettromagnetismo, le interazioni non avvengono a distanza, ma tramite uno scambio di energia-impulso (in qmeccanica quantistica si direbbe tramite uno scambio di quanti) trasportato da un fotone (il quanto dell'interazione e.m.):



Anche il campo e.m. può essere individuato da un quadrivettore $A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A})$.

4.1 Campo elettrico e campo magnetico

Vogliamo studiare il moto di una particella carica in un campo e.m. senza considerare come essa con il suo moto lo alteri.

Consideriamo a questo scopo l'azione

$$S = \int_{E_1}^{E_2} \left(-mcds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu \right) \quad (4.1)$$

dove abbiamo indicato con e la carica della particella, ossia la misura dell'intensità dell'accoppiamento di questa con il campo.

Esplicitando ds e il prodotto $A_\mu dx^\mu$:

$$\begin{aligned} S &= \int_{E_1}^{E_2} (-mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt - \frac{e}{c} (\Phi c dt) + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{dr}) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (-mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (L_0 + L_{int}) dt \end{aligned} \quad (4.2)$$

da cui, come già ricavato in precedenza:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} H = \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} + e\Phi - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e\Phi \end{aligned} \quad (4.4)$$

rispettivamente momento cinetico coniugato ed energia totale.

Inoltre

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \vec{\nabla} \Phi \quad (4.5)$$

Consideriamo per un attimo la componente x del vettore $\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v})$:

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v})]_x &= \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} v_y + \frac{\partial A_z}{\partial x} v_z + \\ &+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y \right) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} v_z - \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \right) = \\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) A_x &+ \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + v_z \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] = \\ &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) A_x + [\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})]_x \end{aligned} \quad (4.6)$$

da cui, risolvendo i calcoli per ogni componente, si ottiene infine:

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{A} + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \quad (4.7)$$

Questo risultato algebrico ci serve per sviluppare la (4.5):

$$\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{P}} - \frac{e}{c} \dot{\vec{A}} = \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) + \frac{e}{c} \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - e \vec{\nabla} \Phi - \frac{e}{c} \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} \right] \quad (4.8)$$

che, essendo

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{A} \quad (4.9)$$

diventa

$$\dot{\vec{p}} = \frac{e}{c} \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + e[-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}] \quad (4.10)$$

Vogliamo porre

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases} \quad (4.11)$$

rispettivamente, *campo elettrico* e *campo magnetico*. Queste posizioni ci permettono di ottenere la forza di Lorentz:

$$\dot{\vec{p}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \wedge \vec{H} \quad (4.12)$$

4.2 Invarianza di gauge

Letteralmente, gauge significa 'ricalibratura': essa rappresenta una particolare trasformazione.

L'invarianza di gauge è una trasformazione di gauge che lascia inalterati in forma degli oggetti, in questo caso i campi elettrico e magnetico. Infatti, sia data la gauge di Lorentz

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (4.13)$$

essendo f arbitraria. Ricordando $dx^0 = cdt$:

$$\begin{cases} \vec{E}' = -\vec{\nabla}(\Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \vec{E} + (-\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}) = \vec{E} \\ \vec{H}' = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}) = \vec{H} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{H} \end{cases}$$

4.3 Equazioni del moto

Tornando all'azione, possiamo scrivere in forma covariante:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{E_1}^{E_2} (-mc \sqrt{dx_\mu dx^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu) = \\ &= \int_{E_1}^{E_2} [-mc \frac{dx^\mu}{ds} \delta(dx^\mu) - \frac{e}{c} \delta A_\mu dx^\mu - \frac{e}{c} A_\mu \delta(dx^\mu)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Poichè $u_\mu \equiv \frac{dx_\mu}{ds}$ e

$$\begin{aligned} u_\mu d(\delta x^\mu) &\equiv d(u_\mu \delta x^\mu) - d(u_\mu) \delta x^\mu \\ A_\mu d(\delta x^\mu) &\equiv d(A_\mu \delta x^\mu) - d(A_\mu) \delta x^\mu \end{aligned}$$

e gli integrali dei differenziali totali sono nulli, e inoltre

$$\begin{aligned} d(x^\mu) \delta A_\mu &\equiv \frac{dx^\mu}{ds} \delta A_\mu ds \equiv u^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu ds \equiv u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \delta x^\mu ds \\ \delta x^\mu d(A_\mu) &\equiv \delta x^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} ds \equiv u^\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\mu ds \end{aligned} \quad (4.15)$$

Quanto provato finora, sostituito nell'azione:

$$\delta S = - \int_{E_1}^{E_2} \left(-mc \frac{du_\mu}{ds} + \frac{e}{c} u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} u^\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) \delta x^\mu ds = 0 \quad (4.16)$$

da cui le equazioni del moto:

$$-mc \frac{du_\mu}{ds} \equiv \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu \equiv \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \quad (4.17)$$

definendo il *tensore del campo e.m.* (antisimmetrico) $F_{\mu\nu}$ come nel prossimo paragrafo.

In particolare

$$\begin{aligned} -mc \frac{du_0}{ds} &\equiv \frac{e}{c} F_{0\nu} u^\nu \implies \\ \implies \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} e \vec{E} \cdot \vec{v} \implies \\ &\implies \frac{d}{dt} (E_{cin}) = e \vec{E} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sempre dalle equazioni del moto, e ricordando di tenere presente il tensore definito come nel paragrafo successivo, per $\mu = 1, 2, 3$, si ottiene

$$\psi = \dot{\vec{p}} = e \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \wedge \vec{H} \quad (4.19)$$

ovvero ancora l'equazione di Lorentz, stavolta ottenuta dalla forma covariante.

4.4 Il tensore del campo e.m.

Definiamo

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

per via delle equazioni del moto determinate in precedenza.

Questo importantissimo tensore si trasforma come

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (4.20)$$

Infatti:

$$\Lambda F = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\beta F_{10} & \gamma F_{01} & \gamma F_{02} + \gamma\beta F_{12} & \gamma F_{03} + \gamma\beta F_{13} \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \dots & \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

e svolgendo tutti i prodotti riga per colonna, si perviene a

$$(\Lambda F)\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ -E'_x & 0 & -H'_z & H'_y \\ -E'_y & H'_z & 0 & -H'_x \\ -E'_z & -H'_y & H'_x & 0 \end{pmatrix}$$

avendo indicato per brevità le componenti con gli indici dei vettori campo elettrico e campo magnetico trasformati secondo Lorentz, come ogni altro vettore (il lettore può verificare manualmente).

In forma compatta le possiamo scrivere

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} - \frac{1}{c}\vec{H} \wedge \vec{v}) \quad (4.22)$$

$$\vec{H}' = \gamma(\vec{H} + \frac{1}{c}\vec{E} \wedge \vec{v}) \quad (4.23)$$

I due campi non sono separati: dove è $\vec{E} = 0$ in K , in K' è $\vec{E}' \neq 0$ e allo stesso modo per \vec{H} .

4.5 Invarianti

Vogliamo far notare una simmetria, dovuta ad un'inversione temporale:

$$t \longrightarrow -t : \begin{cases} \vec{E} \longrightarrow \vec{E}, \vec{H} \longrightarrow -\vec{H} \\ \vec{\Phi} \longrightarrow \vec{\Phi}, \vec{A} \longrightarrow -\vec{A} \end{cases} \quad (4.24)$$

Detto questo, introduciamo il *tensore di Ricci-Levi Civita*¹ $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Allora si vede subito che le seguenti quantità sono invarianti:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2) \quad (4.25)$$

$$F_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -8\vec{H} \cdot \vec{E} \quad (4.26)$$

rispettivamente uno scalare e uno pseudoscalare.

Poichè queste sono quantità invarianti, ne discende:

$$|\vec{H}| < (>)(=)|\vec{E}| \implies |\vec{H}'| < (>)(=)|\vec{E}'| \quad (4.27)$$

$$\vec{H} \cdot \vec{E} < (>)(=)0 \implies \vec{H}' \cdot \vec{E}' < (>)(=)0 \quad (4.28)$$

Tutto ciò implica che mediante una trasformazione di Lorentz si possono assegnare a \vec{E}' e \vec{H}' valori arbitrari, purchè per essi valgano $H'^2 - E'^2 = H^2 - E^2$ e $\vec{H}' \cdot \vec{E}' = \vec{H} \cdot \vec{E}$.

In particolare è sempre possibile costruire un riferimento dove $\vec{H}' \parallel \vec{E}'$: $\vec{H}' \cdot \vec{E}' = H'E'$.

Infine si dimostra subito che:

$$2(H^2 - E^2) = 0, \vec{H} \cdot \vec{E} = 0 \implies \vec{H}^2 = \vec{E}^2, \vec{H} \perp \vec{E} \quad (\forall K, K', \dots) \quad (4.29)$$

$$\vec{H} \cdot \vec{E} = 0, (H^2 - E^2) < (>)0 \implies \exists S' : \vec{E}' = 0 \quad (\vec{H}' = 0) \quad (4.30)$$

Per quanto riguarda l'ultima implicazione, è valido anche il viceversa.

¹Il tensore di Ricci è un tensore molto particolare, infatti in uno spazio di dimensione quattro le matrici di rango 4 completamente antisimmetriche hanno una sola componente indipendente (costituiscono cioè uno spazio monodimensionale), quindi è una base per tale spazio (Simone Piccardi).

4.6 Equazioni di Maxwell

Dalle definizioni date di campo elettrico e campo magnetico, e ricordando che $rot(grad(\Phi)) = 0$ e $div(rot(\vec{A})) = 0$, otteniamo:

$$\begin{cases} rot(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ div(\vec{H}) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

o in forma covariante:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (4.32)$$

che rappresentano la prima coppia delle equazioni di Maxwell.

Questa equazione è identicamente nulla scelti i 3 indici tutti uguali tra loro; quando 2 di essi sono uguali, poichè il tensore F è antisimmetrico ed ha altre proprietà, l'equazione diventa banale; se sono tutti diversi si ottengono allora le equazioni del sistema dato.

In generale possiamo riassumere tutto nella forma compatta

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} \equiv 0 \quad (4.33)$$

con il tensore di Ricci-Levi Civita.

Finora abbiamo descritto con queste equazioni il moto di una particella in un campo dato. Supponiamo da adesso che siamo in presenza di altre cariche e correnti che alterano in campo.

Questo significa che va aggiunto all'azione un ulteriore termine dipendente dal campo, sotto le ipotesi che:

- Valga il principio di sovrapposizione: i campi distinti di 2 cariche separate, sommati, devono dare il campo che ci sarebbe in presenza di entrambe;
- Il termine aggiuntivo è quadratico: non possono apparire i potenziali perchè non sono definiti univocamente, dunque sarà un termine scalare.

Indichiamo il termine aggiuntivo con

$$S' = k \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4\Omega \quad (4.34)$$

essendo $k = -\frac{1}{16\pi c}$ una costante arbitraria e $d^4\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ un elemento infinitesimo di volume.

Estendendo l'azione alla somma di tutte le cariche e correnti si ottiene

$$S = - \sum \int mcds - \sum \int \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4\Omega \quad (4.35)$$

che descrive il moto delle particelle nel campo somma di quello esterno e di quello generato dal loro moto.

Definizione 10 Definiamo densità di carica $\varrho(\vec{r}, t)dV$ la carica contenuta nel volumetto dV centrato intorno al punto x, y, z all'istante t .

Si avrà allora che $\int \varrho dV = \sum_A = e_A$, ossia la carica della particella A , e dato il δ di Dirac, definito come

$$\int_I dx f(x) \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.36)$$

definiamo anche

$$\varrho = \sum_A e_A \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_A) \quad (4.37)$$

Tornando alla carica, essa deve essere un invariante, ed essendo $dV dt = d^4\Omega$ invariante, otteniamo

$$\varrho dV dx^\mu = \varrho dV \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau = \varrho dV \frac{dx^\mu}{dt} dt \quad (4.38)$$

da cui definiamo la *tetracorrente*

$$j^\mu \equiv \varrho \frac{dx^\mu}{dt} \equiv (c\varrho, \varrho \vec{v}) \quad (4.39)$$

che una volta dato, si ottiene

$$- \sum \int \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu = - \frac{1}{c} \int A_\mu \varrho dV \frac{dx^\mu}{dt} dt = - \frac{1}{c^2} \int j^\mu A_\mu d^4\Omega \quad (4.40)$$

Da questa, poichè l'azione è gauge-invariante, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int j^\mu A_\mu d^4\Omega &= \int j^\mu A'_\mu d^4\Omega = \int j^\mu (A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}) d^4\Omega = \\ &= \int j^\mu A_\mu d^4\Omega + \int j^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} d^4\Omega \implies \int j^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} d^4\Omega = 0 \implies \\ \int \frac{\partial (f j^\mu)}{\partial x^\mu} d^4\Omega &= \int f \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} d^4\Omega \implies \int_\Sigma (f j^\mu) d\Sigma_\mu = \int f \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} d^4\Omega \end{aligned} \quad (4.41)$$

dove Σ è la superficie chiusa che racchiude il volume di integrazione (ipersuperficie all'infinito). Il primo degli ultimi 2 integrali è il flusso di fj^μ attraverso Σ , e dunque è nullo per il teorema di Gauss; di conseguenza, per l'arbitrarietà di f , si ottiene dal secondo integrale:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} \equiv 0 \implies \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (4.42)$$

che è l'equazione di continuità.

Notiamo che da una considerazione di gauge-invarianza siamo giunti alla continuità: si può mostrare che i due concetti si implicano al viceversa.

L'equazione di continuità si poteva ottenere anche da considerazioni di carattere fisico, riconoscendo che la variazione nel tempo della carica nel volume dV chiuso, poteva essere dovuta soltanto a un flusso attraverso la superficie di quest'ultimo:

$$\frac{d}{dt} \int \varrho dV = - \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_{\Sigma} \text{div}(\vec{j}) dV \implies \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) \right) dV = 0 \quad (4.43)$$

che deve essere valida per ogni dV , e di conseguenza si ottiene l'argomento uguale a zero, cioè l'equazione di continuità ancora una volta.

Tornando all'espressione dell'azione, consideriamo la traiettoria assegnata e variamo il tetrapotenziale, per ottenere le equazioni del campo e.m.:

$$\begin{aligned} \delta S &= - \int \left[\frac{1}{c^2} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{16\pi c} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right] d^4\Omega = \\ &= - \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right] d^4\Omega = \\ &= - \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) \right] d^4\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

da cui, eseguendo la variazione:

$$- \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right) \right] d^4\Omega = 0 \quad (4.45)$$

Poichè scambiando gli indici si ha che $F^{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu = -F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu$, si ha

$$- \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu \right] d^4\Omega = 0 \quad (4.46)$$

Poichè $F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta A_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) - \delta A_\mu \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}$, si ottiene

$$\begin{aligned} - \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right] \delta A_\mu d^4\Omega + \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial}{\partial x^\nu} (F^{\mu\nu} \delta A_\mu) d^4\Omega = \\ - \frac{1}{c} \int \left[\frac{1}{c} j^\mu + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right] \delta A_\mu d^4\Omega - \frac{1}{4\pi c} \int (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) dS_\nu = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

dove dS_ν è l'elemento di ipersuperficie che racchiude il volume di integrazione, ossia tutto lo spazio con i tempi da quello iniziale a quello finale.

Questo integrale dunque, nella sua parte spaziale si annulla poichè il campo deve essere nullo all'infinito e nella sua parte temporale perchè i δA_μ sono nulli agli istanti estremi (per definizione dell'azione). In definitiva si ottiene dunque che l'argomento della restante parte integrale deve essere nullo, ossia

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \equiv -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (4.48)$$

che è la seconda coppia delle equazioni di Maxwell, che si ottengono come nel caso della prima coppia:

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div}(\vec{E}) = 4\pi \varrho \end{cases} \quad (4.49)$$

4.6.1 Conclusioni

Vogliamo riassumere, per chiarezza, quanto trovato finora, per le equazioni di Maxwell nella materia:

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{E}) = 4\pi \varrho \\ \text{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div}(\vec{H}) = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

o in forma covariante:

$$\begin{cases} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} \equiv 0 \\ \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \equiv -\frac{4\pi}{c} j^\mu \end{cases} \quad (4.51)$$

4.7 Onde

Consideriamo le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{E}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{H}) = 0 \end{cases} \quad (4.52)$$

Se le derivate temporali che compaiono non fossero non nulle, le soluzioni delle equazioni sarebbero funzioni armoniche (senza massimi nè minimi) di condizioni nulle al contorno, per cui sarebbero nulle ovunque.

Quindi, ponendoci nella situazione in cui questo non accada, consideriamo la gauge di Coulomb $\Phi = 0$ e $div(\vec{A}) = 0$, ottenendo:

$$\begin{aligned} rot(\vec{H}) &= rot(rot(\vec{A})) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + grad(div(\vec{A})) = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ &\implies \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = \square \vec{A} = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Analogamente da

$$rot(rot(\vec{E})) = rot\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (rot(\vec{H})) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.54)$$

e allo stesso modo per \vec{H} , si ottengono

$$\square \vec{E} = 0 \quad (4.55)$$

$$\square \vec{H} = 0 \quad (4.56)$$

ovvero i 3 vettori \vec{E} , \vec{H} , \vec{A} soddisfano nel vuoto l'equazione di D'Alembert.

In forma covariante:

$$0 \equiv \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) \quad (4.57)$$

che nella gauge di Lorentz $\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ riporta a

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\nu} \equiv 0 \equiv \square A_\mu \quad (4.58)$$

con la conseguente implicazione che la gauge di Coulomb è più restrittiva di quella di Lorentz: mentre la prima implica l'altra, non è vero il viceversa. Inoltre la gauge di Lorentz è invariante per trasformazioni di Lorentz.

L'operatore di D'Alembert compare in tutti i processi dove si parla di *onde*, e in effetti, dall'applicazione di questo come abbiamo già mostrato, si ottiene l'equazione delle onde.

Sia ora f una componente di uno dei 3 vettori suddetti, e per semplicità supponiamo che dipenda solo da (x, t) . Dall'applicazione di \square risulta

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, t) \quad (4.59)$$

e posto $\xi = x - ct$ e $\eta = x + ct$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c \frac{\partial t}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (4.61)$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial \xi} = G(\xi)\end{aligned}$$

rispettivamente, due funzioni indipendenti o da ξ e η : ma allora

$$f(x, t) = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (4.62)$$

somma di una funzione regressiva e di una progressiva (forma generale dell'espressione di un'onda).

In particolare, nel caso in cui f sia periodica di t :

$$\begin{aligned}f(x, t) = g(x) \cos wt &\implies g(x) : \frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{w^2}{c^2} g = 0 \implies \\ &\implies g(x) = g_0 \cos \frac{w}{c} x \implies \\ &\implies f(x, t) = \alpha \cos wt \cos \frac{w}{c} x\end{aligned} \quad (4.63)$$

cioè g è armonica di x e f è prodotto di 2 funzioni periodiche.

Ricordando l'espressione di Eulero per il coseno:

$$\begin{aligned}f(x, t) &= \frac{\alpha}{4} (e^{iwt} + e^{-iwt}) (e^{i\frac{w}{c}x} + e^{-i\frac{w}{c}x}) = \\ &= f_0 (e^{iw(t+\frac{x}{c})} + e^{iw(t-\frac{x}{c})} + e^{-iw(t+\frac{x}{c})} + e^{-iw(t-\frac{x}{c})}) = \\ &= 2f_0 [\cos[w(t+\frac{x}{c})] + \cos[w(t-\frac{x}{c})]]\end{aligned} \quad (4.64)$$

che nel caso generico $f(\vec{x}, t)$ scriveremo

$$f(\vec{x}, t) = \text{Re}\{f_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)}\} \quad (4.65)$$

detto $|\vec{k}| = \frac{w}{c}$ il *vettore d'onda*. Introdotta la lunghezza d'onda λ , abbiamo che $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n}$ (con \hat{n} versore della direzione di propagazione) e $w = \frac{2\pi}{\lambda} c$, per cui $\lambda\nu = c$, essendo $\nu = \frac{w}{2\pi}$. Queste onde si dicono *monocromatiche*.

Nel caso come quello precedente, in cui f dipende solo da una coordinata spaziale e dal tempo si hanno *onde piane monocromatiche*.

Volendo esprimere i 3 vettori in maniera simile (ricordiamo che f ne è una componente), abbiamo:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \text{Re}\{\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)}\} \implies \\ \implies \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \frac{w}{c} \vec{A} = i |\vec{k}| \cdot \vec{A}\end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\implies \vec{H} = \text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = i \vec{k} \wedge \vec{A} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \wedge \vec{E} \quad (4.67)$$

che mostra l'ortogonalità dei campi elettrico e magnetico tra loro e alla direzione di propagazione e che $|\vec{E}| = |\vec{H}|$

4.8 Effetto Doppler

Sia $f(\vec{r}, t)$ una qualunque componente del campo e.m.: essa è soluzione dell'equazione di D'Alembert, il cui operatore è un invariante:

$$f(\vec{r}, t) = \bar{f}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-wt)} \implies 0 = \square f(\vec{r}, t) = \left(-\vec{k}^2 + \frac{w^2}{c^2}\right)f(\vec{r}, t) \quad (4.68)$$

Affinchè questo valga in ogni s.r.i. è necessario che valgano contemporaneamente

$$\begin{cases} \frac{w^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0 \\ k_\mu k^\mu = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

avendo definito con $k_\mu \equiv (\frac{w}{c}, \vec{k})$ il *quadrivettore d'onda*.

Notiamo che (detto $\hbar = \frac{h}{2\pi}$) per $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ e $E = \hbar w$ si ha $\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = 0$ e $|\vec{k}| = \frac{w}{c}$, $|\vec{p}| = \frac{E}{c}$.

Ne segue subito che $wt - \vec{k}\cdot\vec{r} \equiv k_\mu x^\mu$, invariante, e questo è fondamentale per quello che andremo ad analizzare in seguito.

4.8.1 Conseguenze

Consideriamo una sorgente S in quiete in O' , che si muove rispetto ad O con velocità \vec{v} e sia α' l'angolo che il suo segnale forma con l'asse x' e α quello che forma con l'asse x . Si ha che

$$\begin{aligned} k_0 &= \gamma(k'_0 + \beta k'_1) \implies \\ \implies w &= \gamma(w' + vk'_x) = \gamma w' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha'\right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

in cui distinguiamo 3 casi:

$$\begin{cases} w = \gamma w' (1 + \beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} w' > w' & (\alpha' = 0) \\ w = \gamma w' (1 - \beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} w' < w' & (\alpha' = \pi) \\ w = \gamma w' > w' & (\alpha' = \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (4.71)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} k_x &= \gamma(k'_x + \beta \frac{w'}{c}) \implies \\ \implies \frac{w}{c} \cos \alpha &= \gamma \frac{w'}{c} (\cos \alpha' + \beta) \implies \\ \gamma w' (1 + \beta \cos \alpha') \cos \alpha &= \gamma \frac{w'}{c} (\cos \alpha' + \beta) \end{aligned}$$

da cui

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \beta}{1 + \beta \cos \alpha'} \quad (4.72)$$

Da notare che:

- $\alpha' = 0 \implies \alpha = 0$;
- $\alpha' = \pi \implies \alpha = \pi$;
- $\alpha' = \frac{\pi}{2} \implies \cos \alpha = \beta$ (aberrazione della luce).

4.9 Integrazione di Wiechert dei potenziali

Consideriamo un campo e.m. in presenza di cariche e coorenti. La seconda coppia delle equazioni di Maxwell nella gauge di Lorentz ($\partial_\nu A_\nu = 0$) diventa

$$\square A_\mu = -4\pi j_\mu \quad (4.73)$$

Il nostro problema è quello di risolverle.

Sia data $\hat{L}f(\underline{x}) = g(\underline{x})$, con \underline{x} vettore in uno spazio a n componenti. La soluzione generale sarà data da $f(x) = f_0(x) + \bar{f}(x)$, essendo $\hat{L}f_0(x) = 0$ e

$$\bar{f}(x) = \int d^n y G(x, y) g(y) \quad (4.74)$$

e indicando con $G(x, y)$ la funzione di Green, soluzione dell'equazione

$$\hat{L}G(x, y) = \delta^n(x - y) \quad (4.75)$$

In effetti, verificando:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x f(x) &= \hat{L}_x f_0(x) + \hat{L}_x \int d^n y G(x, y) g(y) \\ &\downarrow = 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Partiamo per esempio dall'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -4\pi \varrho(\vec{r}) \quad (4.77)$$

da cui, posto $\vec{\varrho} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\vec{\varrho}) &= \delta^3(\vec{\varrho}) \implies \\ \implies \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 \vec{k} \nabla^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{\varrho}} \tilde{G}(\vec{k}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\varrho}} \implies \\ \implies \tilde{G}(\vec{k}) &= -\frac{1}{k^2} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Si verifica che

$$\tilde{G}(\vec{\varrho}) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 \vec{k} \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\varrho}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varrho} \quad (4.79)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\vec{k}) &= -\frac{1}{k^2} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{\varrho} \frac{1}{\varrho} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\varrho}} \implies \\ \implies \frac{4\pi}{k^2} &= \int_0^\infty \varrho d\varrho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-ik\varrho \cos \theta} = -2\pi \int_0^\infty \varrho d\varrho \int_0^\pi d\cos \theta e^{-ik\varrho \cos \theta} = \\ &= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty d\varrho (e^{ik\varrho} - e^{-ik\varrho}) = \frac{2\pi}{ik} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty (e^{i(k+i\epsilon)\varrho} d\varrho - \int_0^\infty (e^{-i(k-i\epsilon)\varrho} d\varrho) \right] = \\ &= \frac{2\pi}{ik} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{i(k+i\epsilon)} (-1) - \frac{1}{-i(k-i\epsilon)} (-1) \right] = \frac{2\pi}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{k+i\epsilon} + \frac{1}{k-i\epsilon} \right] = \frac{4\pi}{k^2} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) + \int d^3 \vec{r}' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.80)$$

con Φ_0 soluzione armonica dell'equazione di Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$.

Questo risultato si poteva d'altro canto intuire, essendo il potenziale dovuto a più cariche una somma.

Detta quindi $D(x)$ tale che

$$\begin{aligned} \square D(x) &= -4\pi \delta^4(x) \implies \\ \implies A_\mu(x) &\equiv A_\mu^{(0)} + \int d^4 x' D(x-x') j_\mu(x') \end{aligned} \quad (4.81)$$

dove, ricordando che $\square A_\mu^0 = 0$, e procedendo come per l'equazione di Poisson:

$$\tilde{D}(\vec{k}, w) = -\frac{4\pi c^2}{w^2 - k^2 c^2} \quad (4.82)$$

e si dimostra che ($t > t'$)

$$D^{(rit)}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \equiv \frac{1}{R} \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right) \quad (4.83)$$

avendo infine

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}, t) = \Phi^{(0)} + \int d^3\vec{r}' \frac{\varrho(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^{(0)} + \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R} \end{cases} \quad (4.84)$$

in cui si nota che il potenziale al tempo t è determinato da carica e corrente al tempo $t' = t - \frac{R}{c}$ se e solo se c è la velocità finita dell'interazione.

Per quanto riguarda il potenziale generato da una carica puntiforme in moto lungo la traiettoria $\vec{r} \equiv \vec{r}_0(t)$, si ha che

$$\varrho(\vec{r}', t') = e \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_0(t')) \quad (4.85)$$

che assumendo $\Phi^{(0)} = 0$, porta a

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= e \int d^3\vec{r}' \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_0(t')) = \\ &= e \int dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \end{aligned} \quad (4.86)$$