Studio generale di una conica

Manlio De Domenico

19 Giugno 2003

Definizione 1 *Si definisce* conica C *un'equazione algebrica* $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ *del secondo ordine omogenea.*
Detta A *la* matrice simmetrica dei coefficienti, *e* $\underline{x}$ *il vettore delle coordinate omogenee,* C *ha equazione* $\underline{x}^t A \underline{x} = 0$.

Una conica può essere **riducibile** o **non riducibile**, secondo che sia $\det(A) = 0$ o no.

Una conica riducibile si spezza in due rette nel campo complesso se $rg(A) = 2$, o in due rette coincidenti in tale campo se $rg(A) = 1$.

1 Classificazione

Una conica è classificabile a partire dalle sue intersezioni con la retta impropria.

$$\begin{cases} \underline{x}^t A \underline{x} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

La soluzione di tale sistema riconduce alle tre relazioni

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{12} > 0 \tag{1}$$
$$a_{12}^2 - a_{11}a_{12} = 0 \tag{2}$$
$$a_{12}^2 - a_{11}a_{12} < 0 \tag{3}$$

- La 1 specifica che la retta impropria ha intersezioni reali con la conica, per cui essa sarà un'**iperbole**;

- La 2 specifica che la retta impropria ha intersezioni reali coincidenti con la conica (cioè è tangente), per cui essa sarà una **parabola**;

- La 3 specifica che la retta impropria non ha intersezioni reali con la conica, per cui essa sarà un'**ellisse**.

2 Tangenti a una conica

La retta generica passante per due punti $P(x_1, x_2, x_3)$ e $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ è r : $\lambda\underline{x} + \mu\underline{x}$, con $\lambda, \mu \in R$.

I punti di r che appartengono a C sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \underline{x}^t A \underline{x} = 0 \\ \lambda\underline{x} + \mu\underline{x}' \end{cases}$$

che conduce all'equazione di 2° grado

$$\lambda^2 \underline{x}^t A \underline{x} + 2\lambda\mu \underline{x}^t A \underline{x}' + \mu^2 \underline{x}'^t A \underline{x}' = 0$$

il cui discriminante è

$$\frac{\Delta}{4} = (\underline{x}^t A \underline{x}')^2 - (\underline{x}^t A \underline{x})(\underline{x}'^t A \underline{x}')$$

Si presentano i 3 casi:

- $\frac{\Delta}{4} > 0$: r è secante a C;
- $\frac{\Delta}{4} = 0$: r è tangente a C;
- $\frac{\Delta}{4} < 0$: r è esterna a C.

Se $P' \in C$, allora $\underline{x}^t A \underline{x}' = 0$, e l'equazione della tangente a C per P' ha equazione

$$\begin{aligned} t : (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3)x_1 + \\ (a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3)x_2 + \\ (a_{13}x'_1 + a_{23}x'_2 + a_{33}x'_3)x_3 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

che in forma matriciale può essere scritta $\underline{x}'^t A \underline{x} = 0$.

3 Polarità

La (4) è l'equazione di una speciale retta, detta **polare**.

Definizione 2 *Dato un punto $P' \ni C$, si definisce* polare $\pi(P')$ *la retta $\underline{x}'^t A \underline{x} = 0$ di polo P'.*

Ad ogni punto del piano corrisponde una e una sola polare rispetto ad una conica , il cui significato geometrico è quello di unire i due punti di tangenza di C con le rette passanti per P'.

Ovviamente, se $P' \in C$, la polare è la tangente in P'; possiamo dunque dire che quello di *polare* è una generalizzazione del concetto di tangente.

La polarità rispetto a C è:

- una **relazione lineare**: cioè se un punto descrive una retta, la sua polare ne descrive un fascio con centro nel suo polo;
- una **corrispondenza biettiva**: in quanto ogni retta r del piano è polare di uno e un solo punto di C;
- gode di **reciprocità**: cioè

Teorema 1 *Se A è un punto di polare a, e $B \in a$, allora la polare b di B passa per A e viceversa.*

Con riferimento ad una conica:

Definizione 3 *Due punti si dicono* coniugati *quando l'uno appartiene alla polare dell'altro e viceversa.*

Definizione 4 *Due rette si dicono* coniugate *quando l'una contiene il polo dell'altra e viceversa.*

Definizione 5 *Si definisce* diametro *di una conica, ogni retta polare di un punto improprio rispetto a C.*

Dalla definizione data, discende subito che se $P_\infty(\lambda, \mu, 0)$ sono i punti i impropri, allora

$$d : \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \mu(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0 \tag{5}$$

è l'equazione del fascio di diametri.

Definizione 6 *Due diametri si dicono* coniugati *se l'uno è polare del P_∞ dell'altro.*

Questa definizione implica la condizione

$$a_{11}\lambda\lambda' + a_{12}(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + a_{22}\mu\mu' = 0 \tag{6}$$

Definizione 7 *Si definisce* asse *di una conica, un diametro ortogonale alla direzione di cui è coniugato.*

Definizione 8 *Si definiscono* vertici *di una conica, le intersezioni di C con i suoi assi.*

Da queste definizioni, $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 0$, per cui per $\lambda = \mu'$ e $\lambda' = -\mu$ nella (6), la condizione affinchè $\pi(P_\infty)$ sia un asse è che

$$a_{12}\lambda^2 + (a_{22} - a_{11})\lambda\mu - a_{12}\mu^2 = 0 \tag{7}$$

che risolta rispetto a $\frac{\lambda}{\mu}$ (per $\lambda, \mu \neq 0$) e supposto $a_{12} \neq 0$, per non ridurre a lineare l'equazione quadratica, porta a

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}$$

che sostituita nella (5), porta all'equazione dell'asse generico di una conica:

$$\begin{aligned} a : [&\frac{a_{11}}{2a_{12}}((a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}) + a_{12}]x_1 + \\ &+[\frac{(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}) + a_{22}]x_2 + \\ &+[\frac{a_{13}}{2a_{12}}((a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}) + a_{23}]x_3 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

i cui vertici sono dati $C \cap a$.

E' stato supposto $\lambda, \mu \neq 0$ e $a_{12} \neq 0$. Se invece $\mu = 0$, o $\lambda = 0$, avremo di conseguenza $a_{12} = 0$, e il punto improprio sarà necessariamente $P_\infty(1, 0, 0)$ o $P_\infty(0, 1, 0)$ rispettivamente, le cui polari sono rispettivamente $a_{11}x_1 + a_{13}x_3 = 0$ e $a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$.

Al contrario, se $a_{12} = 0$, si avrà necessariamente $P_\infty(0, 1, 0)$, e dunque come prima. Analogamente per la ricerca dei vertici.

Definizione 9 *Si definisce* centro *di una conica, l'intersezione tra due dei suoi diametri.*

Poichè non importa quali diametri vengono intersecati, scegliamo quelli di forma più semplice, le polari per i punti $(1, 0, 0)$ e $0, 1, 0$ (infatti il centro della conica è centro del fascio dei suoi diametri), ottenendo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo, otteniamo le coordinate del centro della conica:

$$C(\frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, 1) \tag{9}$$

Solo nel caso della parabola, il centro è invece

$$C(-a_{12}, a_{11}, 0) \tag{10}$$

Definizione 10 *Si definisce* asintoto *di una conica, un diametro autoconiugato, cioè che coincide col suo coniugato.*

La condizione espressa dalla definizione data è, dalla (6):

$$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda\mu + a_{22}\mu^2 = 0 \tag{11}$$

Osservando questa espressione, si nota che equivale a porre a sistema l'equazione della conica generica con la retta impropria (che serviva a trovare i punti impropri).

Risolvendo, e sostituendo nella (5), si ottiene l'equazione generale degli asintoti di una conica, per $\lambda, \mu \neq 0$ e $a_{11} \neq 0$:

$$\begin{aligned}[\pm\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}]x_1 + [\frac{a_{12}}{a_{11}}(-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) + a_{22}]x_2 +\\ +[\frac{a_{13}}{a_{11}}(-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) + a_{23}]x_3 = 0\end{aligned} \tag{12}$$

Nei casi in cui, $\lambda, \mu = 0$, si hanno rispettivamente $a_{22}, a_{11} = 0$, e di conseguenza gli asintoti $a_{12}x_1 + a_{23}x_3 = 0$ e $a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$.

Se $a_{11} = 0$ e $a_{12} \neq 0$, l'equazione dell'asintoto sarà

$$\begin{aligned}a_{12}x_1 + \frac{1}{2}a_{22}x_2 + (a_{23} - \frac{1}{2}\frac{a_{13}a_{22}}{a_{12}})x_3 = 0 \Longrightarrow\\ 2a_{12}^2x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + (2a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})x_3 = 0\end{aligned} \tag{13}$$

4 Equazioni ridotte

Si assume come origine del sistema di riferimento il punto $O(0,0,1)$ e come assi coordinati $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ due diametri coniugati della conica. I 3 punti $x_{1\infty}, x_{2\infty}, O$ sono i vertici di un triangolo autopolare, dove la conica assume la **forma ridotta**

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0 \tag{14}$$

Assumendo invece come origine O un punto proprio della conica, come asse $x_1 = 0$ la tangente a C in O, e come asse $x_2 = 0$ il diametro di c passante per O, l'equazione generale della conica si riduce a un'altra **forma ridotta**:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0 \tag{15}$$

5 Coniche come luoghi geometrici

Dapprima una definizione generale che fa uso del concetto di *fuoco* e *direttrice* e *eccentricità* di una conica:

Definizione 11 *Il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante il rapporto della distanza dal fuoco* $F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ *e dalla direttrice di equazione* $x = \frac{a}{e}$*, è un'ellisse, una parabola, un'iperbole, secondo che l'eccentricità e sia minore, uguale, o maggiore di 1.*

dove l'eccentricità è il numero $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

In altro modo si possono definire le coniche in termini di somme e differenze di distanze da due punti, che si mantengano costanti.

6 Fasci di coniche

L'intersezione di due coniche è sempre per 4 punti, detti **punti base**.

Assegnati 5 punti del piano, linearmente indipendenti, per essi passa una e una sola conica del piano, definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Se vengono assegnati un numero minore di punti base, avremo un **fascio di coniche**. Se due di questi sono **punti ciclici**, il fascio sarà composto interamente di circonferenze.

Al contrario in generale in un fascio non troviamo circonferenze.

Un fascio di coniche è individuato dalla combinazione lineare di 2 coniche, dette *generatrici*.

In generale in un fascio possono esistere 2 parabole, ne possono esistere infinite solo nel caso in cui tutte le coniche del fascio siano proprio parabole.

Un fascio di coniche individuato da 2 parabole non è costituito tutto da parabole; lo è solo se le 2 parabole hanno lo stesso punto improprio.

In ogni fascio ci sono 3 coniche spezzate che possono essere utilizzate per costruire il fascio stesso. Se cene sono più di 3, allora il fascio è composto tutto di coniche spezzate.

Possono presentarsi diversi casi:

- **Coniche:** (A, B, C, D): le coniche spezzate sono 3 e precisamente sono le 3 coppie di rette che è possibile costruire;

- **Coniche tangenti:** $(A = B, C, D)$: le coniche spezzate sono ancora 3, ma due di esse coincidono. Le coniche generatrici sono quella spezzata nella tangente in A e nella retta CD, e quella spezzata nelle rette AC e AD;

- **Coniche bitangenti:** $(A = B, C = D, A \neq C)$: le coniche spezzate sono 3, ma due di esse coincidono. Le coniche generatrici sono quella spezzata nelle tangenti in A e in C, e quella spezzata nella retta AC contata due volte;

- **Coniche osculatrici:** $(A = B = C, A \neq D)$: le coniche spezzate sono ancora 3, ma coincidono tutte nella spezzata nella tangente in A e nella retta AD;

- **Coniche iperosculatrici:** $(A = B = C = D)$: le coniche spezzate sono 3, ma coincidono tutte nella spezzata nella tangente in A contata 2 volte.

Negli ultimi due casi, la seconda conica necessaria a costruire il fascio deve essere una non spezzata.

Altra proprietà del fascio di coniche è che se due generatrici hanno un punto di contatto di un certo ordine, tutte le coniche del loro fascio distinte da esse ha con esse stesse un contatto dello stesso ordine.